

3. Problemas de resolución numérica de problemas de frontera

Problema 3.1 Encontrar la solución del problema de valores frontera

$$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 4. \end{cases}$$

Problema 3.2 Determinar la ecuación (variacional) que verifica la derivada respecto a la posición inicial de

$$x' = t + tx + (t + 1)x^2.$$

Problema 3.3 Determinar la ecuación (variacional) que verifica la derivada respecto a la velocidad inicial (en $t = -1$) de

$$x'' = t + tx + (t + 1)x'.$$

Plantear el método de tiro para resolver el problema de valores en la frontera determinado por $x(-1) = x(1) = 0$, aplicando el método de Newton-Raphson.

Problema 3.4 Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} x'' + x' + 10t = 0, \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 2, \end{cases}$$

para $x(1/2)$ mediante el método de diferencias finitas con $h = 1/2$.

Ecuación del calor.

Problema 3.5 Demostrar que para una n fija, la condición de estabilidad del método explícito es:

$$s < \left(1 + \cos \frac{\pi}{n+1}\right)^{-1}.$$

Para $n = 10$, ¿qué valores de k son válidos?

Problema 3.6 Probar que hacen falta aproximadamente 10^7 puntos en la malla para lograr la estabilidad del método explícito cuando $h = 10^{-2}$ y $0 \leq t \leq 10$. ¿Y para $h = 10^{-4}$?

Problema 3.7 Demostrar que si $r > 0$, entonces

$$\rho((I + rB)^{-1}(I - rB)) = \frac{1 - q}{1 + q},$$

donde

$$q = 4r \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n+2} \right).$$

Problema 3.8 Demostrar que el método de Crank-Nicolson es estable para todo valor de $s = k/h^2 > 0$.

Problema de Dirichlet

Problema 3.9 Resolver el problema de Dirichlet con $u(x, y) = xy$ para $x = 0$ o $x = 1$ o $y = 0$ o $y = 1$, mediante diferencias finitas y $h = 1/3$. ¿Qué error se comete?

Problema 3.10 Plantear el problema de Dirichlet con $u(x, y) = \sin(xy)$ para $x = 0$ o $x = 1$ o $y = 0$ o $y = 1$, mediante diferencias finitas y $h = 1/4$.