2. Problemas de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Problema 2.1 Probar que el método de Heun es de segundo orden.

Problema 2.2 Probar que el método de Euler implícito es de primer orden[1].

Problema 2.3 Estudiar la consistencia (en función de α) de la siguiente familia de métodos de un paso:

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) f(t_n, x_n) + \frac{\alpha}{2} f(t_{n+1}, x_{n+1})\right).$$

Calcular el orden cuando sea consistente.

Problema 2.4 Probar que el método de Heun es un método de Runge-Kutta y obtener las fórmulas de cuadratura.

Problema 2.5 Obtener la función ϕ que describe el método de Taylor de orden tres para el PVI

$$x' = -x + 2\sin(t), \quad x(0) = 1.$$

Problema 2.6 Aplicar tres pasos del método de Euler para obtener una aproximación del valor en $t = 1$ de la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = xy \end{cases}$$

con $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Problema 2.7 Determinar las regiones de estabilidad absoluta del método de Heun, del método del trapecio y del método de Taylor de orden dos.

Problema 2.8 ¿Puede un método de la forma

$$x_{n+2} - 2\alpha x_{n+1} + \alpha^2 x_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

ser convergente?

[1] Nótese que en este método, $\phi(t, x, h) = f(t + h, y)$, donde y es la solución de $y = x + hf(t + h, y)$. Desarrollar ϕ en serie de Taylor respecto de h hasta primer orden (con lo que los errores dependen de las derivadas segundas).

Problema 2.9 ¿Puede un método de la forma

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + \alpha_0 x_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

ser convergente? Razonar la respuesta.

Problema 2.10 ¿Para qué valores de α y β es el método

$$x_{n+2} + \alpha x_{n+1} + x_n = h(f_{n+2} + \beta f_{n+1} + f_n)$$

convergente? Razonar la respuesta.

Problema 2.11 ¿Para qué valores de α y β son los métodos de la forma

$$x_{n+2} + x_{n+1} + \alpha x_n = h(f_{n+2} + \beta f_{n+1} + f_n)$$

convergentes?

Problema 2.12 ¿Existe algún método de la forma

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

que sea convergente?

Problema 2.13 ¿Pueden existir $\beta_0, \ldots, \beta_4$ tales que el método

$$x_{n+4} - x_n = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_3 f_{n+3} + \beta_4 f_{n+4})$$

sea de orden 7 ? (donde f_n denota $f(t_n, x_n)$)

Problema 2.14 ¿Pueden existir $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ tales que el método

$$x_{n+2} - x_n = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2})$$

sea de orden 5 ?

Problema 2.15 ¿Puede un método lineal de dos pasos con $\alpha_2 = 1,\ \alpha_1 > 1,\ \alpha_0 = 0$ ser convergente?

Problema 2.16 Considérense los métodos multipaso de la forma

$$x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

a) ¿Hay algún método de ese tipo que sea convergente?

b) ¿Cuál es el orden máximo de un método de ese tipo?

c) Si $\beta_0 = 1$, ¿hay alguno de orden 2? ¿y de orden 3?

Problema 2.17 Para cada $a \in \mathbb{R}$ considerar el método dado por

$$x_{n+2} + (a-1)x_{n+1} - ax_n = \frac{h}{12}\Big((5-a)f_{n+2} + 8(a+1)f_{n+1} + (5a-1)f_n\Big)$$

a) ¿Para que valores de a es el método que resulta convergente?

b) Estudiar el orden en función del valor de a.

c) Estudiar la estabilidad relativa en el caso $a = 1/2$.

Problema 2.18 ¿Existe algún método lineal explícito tal que

$$C_0 = C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0, \quad C_3 = 0?$$

Problema 2.19 ¿Puede un método de 4 pasos, que verifica la condición de la raíz, ser de orden 7?

Problema 2.20 ¿Puede un método lineal explícito de 7 pasos ser de orden 15?

Problema 2.21 ¿Puede un método lineal implícito de 7 pasos, que verifica la condición de la raíz, ser de orden 14?

Problema 2.22 ¿Puede un método lineal de 8 pasos y orden 11 verificar la condición de la raíz?

Problema 2.23 Pon un ejemplo de método lineal de 2 pasos implícito que no sea convergente.

Problema 2.24 ¿Existe algún método lineal de 2 pasos explícito de orden 3? Si la respuesta es negativa, razonarla. Si es positiva, dar un ejemplo.

Problema 2.25 Considérese el problema de Cauchy $y' = y^2\cos(\pi x),\ y(0) = 1$. Calcular una aproximación de la solución exacta en el punto $x = 1$ utilizando el método de Taylor de segundo orden con paso $h = 1/2$.

Problema 2.26 Aplicar el método

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{h}{2}\big(3f_{n+1} - f_n\big)$$

al problema $x' = t + x, \quad x(0) = 1,$ para calcular una aproximación de la solución exacta en el punto $t = 3/5$, utilizando el paso $h = 1/5$. Las aproximaciones iniciales necesarias calcularlas con el método de Taylor de segundo orden.

Problema 2.27 Considérese el problema de Cauchy $x' = t^2 x$, $x(0) = 1$. Calcular una aproximación de la solución exacta en el punto $t = 2/3$ utilizando el método

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

con paso $h = 1/3$. Las aproximaciones iniciales necesarias calcularlas con el método de Taylor de tercer orden.

Problema 2.28 Estudiar el orden y la convergencia del método

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Problema 2.29 Estudiar el orden y la convergencia del método

$$x_{n+4} = x_n + \frac{4h}{3}(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1}).$$

Problema 2.30 Pon un ejemplo de método lineal de 3 pasos implícito que no sea convergente.

Problema 2.31 ¿Puede ser convergente un método de la forma

$$x_{n+4} - 3x_{n+3} + \frac{13}{4}x_{n+2} - \frac{3}{2}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n = h\big(\beta_3 f_{n+3} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\big) \ ?$$

Problema 2.32 Se trata de aplicar el método

$$x_{n+3} - x_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

al problema de valor inicial $x' = t^2 + x$, $x(1) = 2$, para obtener una aproximación de la solución exacta en el punto $t = 5$, utilizando el paso $h = 1$.

a) Calcular las aproximaciones iniciales necesarias utilizando el método de Taylor de segundo orden.

b) Indicar como se calcularía la aproximación en el punto $t = 5$.

Repetir el problema pero calculando las aproximaciones iniciales necesarias con el método de Runge-Kutta

$$x_{i+1} = x_i + hf\Big(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\Big).$$

Problema 2.33 Dado el método multipaso

$$x_{n+2} - \frac{4}{5}x_{n+1} - \frac{1}{5}x_n = \frac{h}{5}\big(2f_{n+2} + 4f_{n+1}\big)$$

a) ¿De qué orden es?

b) ¿Es convergente?

c) Demostrar que es relativamente estable para $\bar{h} \in (-1, 1)$.

Problema 2.34 Dado el método multipaso

$$x_{n+4} = x_{n+3} + \frac{h}{24}\big(9f_{n+4} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1}\big)$$

a) ¿De qué orden es?

b) ¿Es convergente?

Problema 2.35 a) Señalar a que familia o familias de métodos pertenece el siguiente:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{h}{2}\Big(f(t_i, x_i) + f\big(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i)\big)\Big)$$

☐ Un paso	☐ Multipaso	☐ Taylor
☐ Runge-Kutta	☐ Adams-Bashforth	☐ Adams-Moulton

b) ¿Que tendríamos que hacer para demostrar que es convergente?

Problema 2.36 Demostrar que si un método lineal de k pasos es convergente, entonces $\sum_{j=0}^{k} \beta_j \neq 0$.

Problema 2.37 Demostrar que un método lineal de k pasos explícito tal que

$$\alpha_k = 1, \quad \alpha_{k-1} = -1, \quad \alpha_{k-2} = \ldots = \alpha_0 = 0$$

es de orden $\leq k$.