1 Tema 1. Ejercicios y problemas

1.1 Ejercicios de ecuaciones en diferencias

Problema 1.1 Calcular un sistema fundamental real de soluciones de la ecuación

$$f(n+4) - 2f(n+3) + 2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

Problema 1.2 Considérese la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 7f(n+2) + 24f(n+1) - 18f(n) = 0.$$

a) Calcular un sistema fundamental real.

b) Calcular la solución que verifica $f(0) = 2,\ f(1) = 7,\ f(2) = 19.$

Problema 1.3 ¿Cuáles son los valores y los vectores propios del operador E?

Problema 1.4 Calcular la solución g de la ecuación

$$g(n+3) - 3g(n+2) + 3g(n+1) - g(n) = 1$$

verifica $g(0) = 3,\ g(1) = 37/6,\ g(2) = 37/3.$

Problema 1.5 Calcular la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - f(n) = n^3,$$

que verifica $f(0) = 3, \quad f(1) = f(2) = 11/6.$

Problema 1.6 a) Calcular la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 2f(n+2) + \frac{5}{4}f(n+1) - \frac{1}{4}f(n) = 0$$

que verifica $f(0) = 3$, $f(1) = 7/2$, $f(2) = 3$.

b) Calcular la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 2f(n+2) + \frac{5}{4}f(n+1) - \frac{1}{4}f(n) = n^2 + 1.$$

que verifica $f(0) = 5$, $f(1) = 177/2$, $f(2) = 144$.

Problema 1.7 Considérese la ecuación en diferencias

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 4f(x+1) - 2f(x) = 2^x x.$$

a) Calcular una solución particular de la ecuación completa.

b) Calcular la solución de la ecuación completa que verifica $f(0) = 2\sqrt{2} - 1,\ f(1) = 3,\ f(2) = 3\sqrt{2} - 3.$

Problema 1.8 Considérese la ecuación en diferencias

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 12f(x+1) - 10f(x) = 7.$$

a) Calcular una solución particular de la ecuación completa.

b) Calcular la solución de la ecuación completa que verifica $f(0) = 1,\ f(1) = -3,\ f(2) = 14i.$

Problema 1.9 Calcular la solución de la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 6f(n+2) + 11f(n+1) - 6f(n) = 3^n,$$

que verifica $f(0) = 6,\ f(1) = 21/2,\ f(2) = 23.$

Problema 1.10 Considérese la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 5f(n+2) + 12f(n+1) - 8f(n) = n^2.$$

a) Calcular un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea.

b) Calcular un sistema fundamental real de soluciones de la ecuación homogénea.

c) Calcular una solución particular de la ecuación completa.

d) Calcular la solución f de la ecuación completa que verifica $f(0) = 3$, $f(1) = 633/125,\ f(2) = 186/125.$

Problema 1.11 a) Considérese la ecuación en diferencias

$$f(n+3) - 5f(n+2) + 8f(n+1) - 4f(n) = i^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

a1) Calcular la solución de la ecuación homogénea que verifica

$$f(0) = 4, \quad f(1) = 10, \quad f(2) = 26$$

a2) Calcular una solución de la ecuación completa.

Problema 1.12 Para las siguientes ecuaciones en diferencias, determinar su estabilidad y convergencia:

1. $f(n+2) + f(n+1) + f(n)/2 = 0.$
2. $f(n+2) - 2f(n+1) - 2f(n) = 0.$
3. $f(n+4) - f(n) = 0.$
4. $f(n+4) - 2f(n+2) + f(n) = 0.$

Problema 1.13 Consideremos la ecuación en diferencias lineal con coeficientes no constantes

$$p_r(n)f(n+r) + p_{r-1}(n)f(n+r-1) + \cdots + p_0(n)f(n) = q(n),$$

donde $p_0, p_1, \ldots, p_r, q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Supongamos que conocemos $f_0, \ldots, f_{r-1}$. Establecer condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones. Poner un ejemplo de no unicidad y otro de no existencia cuando no se verifiquen las condiciones anteriores.

Problema 1.14 Consideremos la ecuación en diferencias no lineal con coeficientes constantes

$$f(n+1) - f^2(n) = 0. \tag{1}$$

¿Existe solución? ¿Es única? ¿El conjunto de soluciones es un espacio vectorial? Describir el conjunto de soluciones.

Problema 1.15 Consideremos la ecuación en diferencias no lineal con coeficientes constantes

$$f(n+1) - f^2(n) = 0. \tag{2}$$

Calcular las soluciones constantes. Determinar el comportamiento asintótico de las soluciones próximas a las soluciones constantes.

Problema 1.16 Considere la ecuación en diferencias

$$f(n+2) - 2f(n+1) - 2f(n) = 0.$$

Una de sus soluciones es $f(n) = (1 - \sqrt{3})^n$. Esta solución alterna sus signos y converge a cero. Calcular e imprimir los 100 primeros términos de esta sucesión por medio de la ecuación $f(n+2) = 2(f(n+1) + f(n))$, tomando como punto de partida $f(0) = 1.$ y $f(1) = 1. - \sqrt{3}.$. Explicar el curioso fenómeno que sucede.

1.2 Ejercicios de sumación de funciones

Problema 1.17 El Tío Gilito se ha metido en un negocio que creía interesante. Sin embargo, el año que empezó (año cero) no ganó nada; el año siguiente (año uno) perdió 16 millones. En los años restantes su ganancia (que puede ser negativa, es decir, pérdida) se rigió por la siguiente fórmula

$$f(n+2) + f(n) = 6n^2 - 26n - 26$$

en donde $f(n)$ es lo ganado (o perdido) en el año n. El año N su capital total está como al principio, es decir, ni ha ganado ni ha perdido. ¿Cuánto gana o pierde al año siguiente? ¿Qué ocurre a partir de ese año?

Problema 1.18 Las páginas de un libro están numeradas con 1, 2, ... Las dos primeras páginas están en blanco. La página $n+2$ tiene n^2 letras más las letras que tiene la página n.

1 ¿Cuántas letras tiene la página 20?

2 ¿Cuántas letras tienen las 20 primeras páginas?. Resolverlo sin calcular las letras que tiene cada página.

(Pistas para saber si los resultados están mal: la suma de los dígitos de la respuesta correcta al apartado 1 es 6, y la de la respuesta al apartado 2 es 27.)

Problema 1.19 Un pintor tiene que pintar las habitaciones de los edificios de una urbanización. Los edificios están numerados con 1, 2, 3, ... El edificio número n tiene $2n+1$ habitaciones. Todas las habitaciones son iguales y para pintar cada una de ellas necesita 2 litros de pintura. Empieza pintando el edificio 1, después el 2, después el 3, . . . Con 1920 litros, ¿cuántos edificios puede pintar? Resolverlo sin calcular, explícitamente, la pintura que necesita para cada edificio.

Problema 1.20 Un tren está formado por 20 vagones. En el primer vagón viajan 20 personas y en el segundo 37. Si un vagón está entre otros dos, entonces su número de viajeros es uno más que la semisuma de los que hay en los vagones inmediatamente anterior y posterior.

a) ¿Cuántos viajeros hay en el último vagón?

b) ¿Cuántos viajeros hay en el tren?

Resolverlo sin calcular cuantos viajeros hay en cada vagón.

Problema 1.21 Disponemos de 1000 cajas numeradas de 1 a 1000. Las dimensiones de la caja n son:

$$\text{largo}= n \text{ cm}, \quad \text{ancho}= n+1 \text{ cm}, \quad \text{alto}= 2 \text{ cm}$$

Calcular la capacidad total en litros de las últimas 100 cajas.

Problema 1.22 Calcular, sin sumar término a término,

$$1+3+7+\ldots+651=\sum_{n=0}^{?} h(n),$$

teniendo en cuenta que $h(n)$ es un polinomio de segundo grado.

Problema 1.23 Expresar el polinomio n^3-n^2+1 en la base

$$n^{(0)}=1, \quad n^{(1)}=n, \quad n^{(2)}=n(n-1), \quad n^{(3)}=n(n-1)(n-2).$$

Usando la expresión anterior, calcular

$$\sum_{n=2}^{200} n^3-n^2+1.$$

Problema 1.24 Considérese la siguiente suma:

$$1+2+1+2+\cdots+2977+3554=\sum_{n=0}^{?} f(n)$$

a) ¿Cuál de las siguientes funciones proporciona el término general de la suma?

1) $f(x) = x+1$, 2) $f(x) = -x^2+2x+1$, 3) $f(x) = \frac{2}{3}x^3-3x^2+\frac{10}{3}x+1$.

b) Calcular la suma resolviendo para ello una ecuación en diferencias.

Problema 1.25 Sabemos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{p} n2^n = 1966080$, y que $\displaystyle\sum_{n=2}^{p+1} n2^n = 4194304$. Calcular p.

Problema 1.26 Calcular, sin sumar término a término,

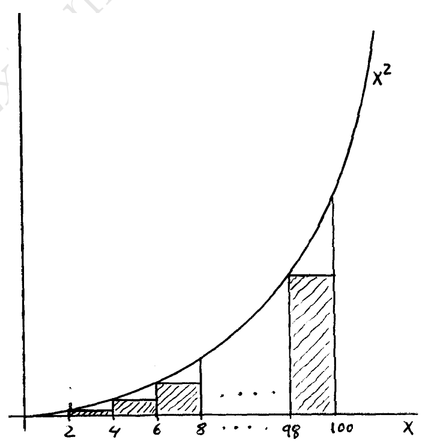
$$1\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5-4\cdot5\cdot6+5\cdot6\cdot7-6\cdot7\cdot8+\cdots+99\cdot100\cdot101-100\cdot101\cdot102.$$

Problema 1.27 Calcular, sin sumar término a término,

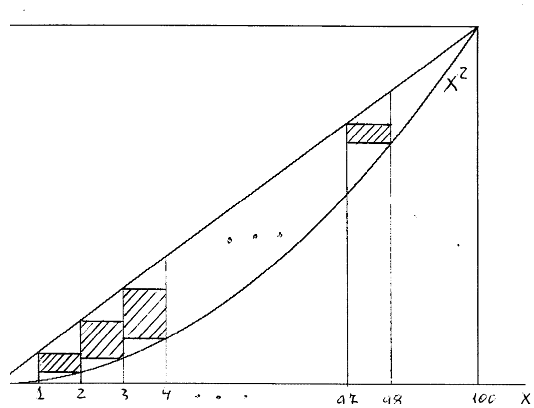
$$1\cdot2\cdot3\cdot2+2\cdot3\cdot4\cdot4+3\cdot4\cdot5\cdot8+4\cdot5\cdot6\cdot16+\cdots+10\cdot11\cdot12\cdot1024.$$

Problema 1.28 Calcular la suma de los n primeros términos de la sucesión de Fibonacci $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

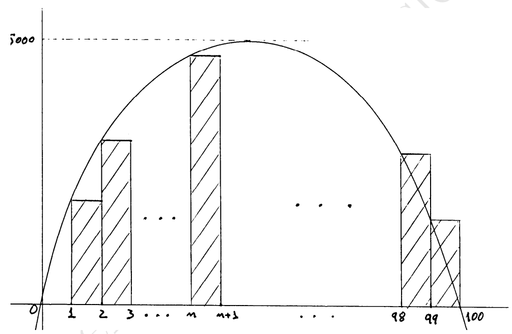
Problema 1.29 Calcular la suma de las áreas de los rectángulos de la siguiente figura:



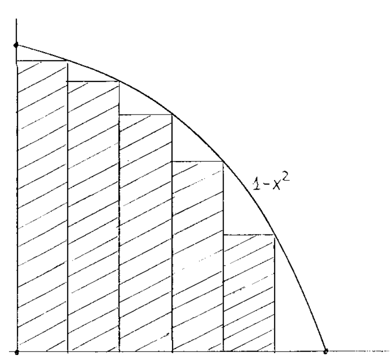
Problema 1.30 Las funciones que aparecen en la siguiente figura son una recta y la parábola x^2. Calcular (sin sumar término a término) la suma de la áreas de los rectángulos sombreados.



Problema 1.31 La curva de la figura siguiente corresponde a la gráfica de un polinomio de segundo grado cuyo valor máximo es 5000. Calcular la suma de las áreas de los rectángulos:



Problema 1.32 Considerar $n \in \mathbb{N}$ y dividir el intervalo $[0, 1]$ en n trozos iguales (por ejemplo, los seis de la figura). ¿Cómo de grande tiene que ser n para que al aproximar $\int_0^1 (1-x^2)\, dx$ con la suma de las áreas de los rectángulos se cometa un error menor que 0.01?



Problema 1.33 Considérese la función x^2 definida en el intervalo $[0, 100]$ y sea $P(x)$ la poligonal que la interpola en los números naturales de ese intervalo. ¿Qué error se comete al aproximar $\int_0^{100} x^2\,dx$ con $\int_0^{100} P(x)\,dx$?

Problema 1.34 Demostrar que el número de Bernoulli B_5 es cero sabiendo que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$.

Problema 1.35 Tenemos p recipientes cilíndricos C_n, $n = 1, 2, \dots, p$. Cada cilindro C_n tiene radio n y altura $2n$. Sabemos que el volumen del conjunto es 6050π. ¿Quién es p? (Pista: $p < 15$.)

Problema 1.36 Si $g \in C^{2k}[m, p]$, entonces según la fórmula de Euler-Maclaurin,

$$\begin{aligned}\sum_{x=m}^{p-1} g(x) = \int_m^p g(t)\,dt &+ \sum_{i=1}^{2k-1} \frac{B_i}{i!}\Big(g^{i-1)}(p) - g^{i-1)}(m)\Big)\\ &+ \frac{B_{2k}}{(2k)!}(p-m)g^{2k)}(\eta), \qquad \eta \in [m,\, p]\end{aligned}$$

Aplicar la fórmula anterior para demostrar que si $f \in C^8\,[2,\,4]$, entonces

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)\,dx =& f(2) + f(4) - \frac{1}{3}\Big(f'(4) - f'(2)\Big) + \frac{1}{45}\Big(f^{3)}(4) - f^{3)}(2)\Big)\\ &- \frac{2}{945}\Big(f^{5)}(4) - f^{5)}(2)\Big) + \frac{2}{4725}f^{8)}(\xi), \qquad \xi \in [2,\, 4].\end{aligned}$$

Problema 1.37 Aplicar la fórmula de Euler-Maclaurin para demostrar que si $f \in C^4[10,\, 20]$, entonces

$$\int_{10}^{20} f(t)\,dt = 5\big(f(10) + f(20)\big) + \frac{25}{3}\big(f'(10) - f'(20)\big) + \frac{1250}{9}f^{4)}(\xi),$$

con $\xi \in [10,\, 20]$.

Problema 1.38 Aplicar la fórmula de Euler-Maclaurin para demostrar que si $f \in C^4\,[0,\, 25]$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{25} f(x)\,dx =& \frac{5}{2}f(0) + 5\Big(f(5) + f(10) + f(15) + f(20)\Big) + \frac{5}{2}f(25)\\ &- \frac{25}{12}\Big(f'(25) - f'(0)\Big) + \frac{5^5}{144}f^4(\xi), \qquad \xi \in [0,\, 25].\end{aligned}$$

Problema 1.39 Aplicar la fórmula de Euler-Maclaurin para aproximar

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx,$$

usando el valor de la función en 10 puntos equiespaciados y de sus derivadas primera, segunda y tercera en los puntos extremos. Acotar el error.

Problema 1.40 Demostrar que si $g(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ entonces

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(0) \frac{x^{(k)}}{k!},$$

donde

$$x^{(k)} = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Pista: Probar que ambas expresiones (polinomio de grado $\leq n$) coinciden para $x = 0, 1, \dots, n$.

Problema 1.41 Usando el problema anterior y el ejercicio de clase, probar que si $g(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$, entonces una solución de $\Delta F(x) = g(x)$ es

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k g(0) \frac{x^{(k+1)}}{(k+1)!}.$$