



Métodos Numéricos I

José Luis Bravo Trinidad



Índice general

Tema 1	Métodos directos de resolución de sistemas lineales	1
1.1	Elementos básicos del análisis matricial	1
1.2	Factorización de matrices	5
1.3	Normas matriciales	8
Tema 1	Ejercicios	13
Tema 2	Elegant$\text{\LaTeX}$ Templates	18
2.1	Online Usage	18
2.2	Portable Version	18
2.3	Update Templates	18
2.4	Other Release Versions	18
Tema 3	ElegantBook Settings	19
3.1	Languages	19
3.2	Device Mode Option	19
3.3	Color Themes	19
3.4	Cover	20
3.5	Chapter Title Display Styles	21
3.6	Introduction of Math Environments	21
3.7	List Environments	24
3.8	Fonts	24
3.9	Bibliography	25
3.10	Preface	26
3.11	Content Option and Depth	26
3.12	Introduction Environment	26
Tema 3	Ejercicios	27
3.13	Margin Notes	27
Tema 4	ElegantBook Writing Sample	29
4.1	Writing Sample	29
4.2	Second section	30
Tema 4	Ejercicios	31
Tema 5	FAQ	32
Tema 6	Version History	33
Bibliografía		35
Apéndice A	Mathematical Tools	36
A.1	Summation Operator and Description Statistics	36

Tema 1 Métodos directos de resolución de sistemas lineales

El objetivo de este tema es obtener la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b, \quad A \in \mathcal{M}_{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n.$$

Nótese que existe una única solución si y sólo si A es no singular.

En asignaturas anteriores (Geometría lineal y Métodos computacionales), se ha estudiado cómo discutir y resolver el sistema por la regla de Cramer, así que nos centraremos en resolver mediante factorización de matrices.

Además, dicha solución se puede obtener por la regla de Cramer. Sin embargo este método es muy poco eficiente. Por ejemplo, si la matriz A es de 100×100 , el número de operaciones elementales es superior a 100! y no se podría calcular.

El problema que trataremos es cómo aproximar dicha solución de modo eficaz.

1.1 Elementos básicos del análisis matricial

1.1.1 Definiciones y propiedades

Matriz transpuesta conjugada Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{i=1 \dots m}^{j=1 \dots n}$ definiremos su transpuesta conjugada como

$$A^* := (\bar{a}_{ji}) \in \mathcal{M}_{n \times m}$$

(La matriz transpuesta conjugada también se denota A^H .)

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $C \in \mathcal{M}_{n \times p}$. Se verifica:

- $A^{**} = A$.
- $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$.
- $(AC)^* = C^* A^*$.

Sean

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n, \quad I = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Decimos que A es

- simétrica si es real y $A = A^t$.
- ortogonal si es real y $AA^t = A^t A = I$.
- hermítica si $A = A^*$.
- unitaria si $AA^* = A^* A = I$.
- normal si $AA^* = A^* A$.

Definiciones Atendiendo a la naturaleza de los elementos:

- A es diagonal si $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.
- A es triangular superior si $a_{ij} = 0$, $i > j$, $1 \leq i, j \leq n$.
- A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$, $i < j$, $1 \leq i, j \leq n$.

- A es (estrictamente) diagonal dominante si

$$|a_{ii}| \underset{(>)}{\geq} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Propiedades Si A es invertible, entonces A^* es invertible y se verifica

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Además, $\det A^* = \overline{\det A}$.

Proposición 1.1

Toda matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.



Demostración:

Sea A estrictamente diagonal dominante. Para probar la existencia de inversa, vamos a aplicar Rouché-Frobenius. En particular, mostraremos que $Ax = 0$ tiene solución única (lo que implica rango máximo). Suponemos que no por reducción al absurdo (existe z tal que $Az = 0$ y $z \neq 0$). Sea i_0 el índice donde se alcanza el máximo de los módulos de los componentes de z (estrictamente positivo)

Como $Az = 0$, $\sum a_{ij}z_j = 0$. En particular para i_0 , pero

$$\begin{aligned} |a_{i_0 i_0}| |z_{i_0}| &= \left| \sum_{j=1, j \neq i_0}^n a_{i_0 j} z_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0 j} z_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}| |z_{i_0}| \\ &= |z_{i_0}| \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0 j}| < |z_{i_0}| |a_{i_0 i_0}|. \end{aligned}$$

De esta contradicción, A es invertible.

Partición de matrices

Dada una matriz $D \in \mathcal{M}_n$, diremos que

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1k_D} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2k_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m_D 1} & D_{m_D 2} & \cdots & D_{m_D k_D} \end{pmatrix},$$

es una partición de D si para cada $1 \leq i, j \leq n$, D_{ij} es una matriz con el mismo número de filas que $D_{i\bar{j}}$ para todo $\bar{j}$ y con el mismo número de columnas que $D_{\bar{i}j}$ para todo $\bar{i}$.

Partición de matrices

Supongamos que $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ son particiones de $A, B, C \in \mathcal{M}_n$.

Teorema 1.1

Si cada producto $A_{is}B_{sj}$ se puede formar y

$$C_{ij} = \sum_s A_{is}B_{sj},$$

entonces $C = AB$.



Autovalores y autovectores Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se llama

- Polinomio característico de A a $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
- Autovalores de A a las raíces del polinomio característico.
- Espectro de A , $\text{Sp}(A)$, al conjunto de autovalores de A .
- Radio espectral de A , $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

- Autovector asociado a un autovalor $\lambda \in \text{Sp}(A)$ a todo vector v que satisfaga $Av = \lambda v$.

Propiedades de los autovectores y autovalores

- A es invertible si y sólo si $0 \notin \text{Sp}(A)$.
- Para todo autovalor λ , $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) > 0$ (todo autovalor tiene un autovector no nulo asociado).
- $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$. En particular, el espectro es invariante por cambio de base.
- Los autovectores asociados a un autovalor λ constituyen el subespacio vectorial $\text{Ker}(A - \lambda I)$, de dimensión menor o igual que la multiplicidad de λ .
- Si λ_1, λ_2 son dos autovalores distintos de A , entonces

$$\text{Ker}(A - \lambda_1 I) \cap \text{Ker}(A - \lambda_2 I) = \{0\}.$$

Demostración

- Trivial
- Teorema de Rouché-Frobenius (el rango no puede ser máximo pues el determinante es nulo).
- $ABv = lv \rightarrow BA(Bv) = Blv = l(Bv) \rightarrow Bv$ autovector asociado a l en BA .
- Si expresamos la matriz en una base tal que los primeros vectores son los autovectores asociados, entonces la aplicación tiene en la diagonal el autovalor, tantas veces como autovectores, luego la multiplicidad algebraica es mayor.
- Sencilla (ejercicio) De hecho, los subespacios vectoriales asociados a los distintos autovectores están en suma directa. Si la suma de sus dimensiones es n , la matriz es diagonalizable.

Propiedades

Proposición 1.2

1. Los autovalores de una matriz hermítica son siempre reales.
2. Los autovalores de una matriz unitaria tienen módulo 1.



Demostración Sea A, λ autovalor, v autovector 1) Si A es hermítica:

$$\lambda v^* v = v^* \lambda v = v^* A v = v^* A^* v = (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \bar{\lambda} v^* v,$$

luego $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

2) Si A es unitaria:

$$|\lambda|^2 v^* v = \bar{\lambda} \lambda v^* v = \bar{\lambda} v^* \lambda v = (\lambda v)^* \lambda v = (Av)^* Av = v^* A^* A v = v^* v.$$

Entonces $|\lambda|^2 = 1$.

Corolario 1.1

Los autovalores de una matriz simétrica son reales.



1.1.2 Descomposición de Schur

Matrices semejantes Se dice que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_n$ son semejantes si existe $P \in \mathbb{M}_n$ invertible, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

A y B son semejantes si y sólo si representan la misma aplicación lineal en dos bases distintas.

Sean $A, B \in \mathbb{M}_n$ matrices semejantes. Se verifica:

- $\det A = \det B$.

- $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Teorema 1.2 (Descomposición de Schur)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Existe una matriz unitaria U tal que la matriz U^*AU es triangular superior. Además los elementos de la diagonal son los autovalores de A .
2. A es normal si y sólo si existe U (unitaria) tal que U^*AU es diagonal.

**Demostración**

1) Por inducción. Trivial si $n = 1$. Suponemos cierto hasta $n - 1$. Sea λ_1 un autovalor de A y x_1 un autovector no nulo asociado a λ_1 normalizado, es decir: $\|x_1\|_2^2 = x_1^*x_1 = 1$, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Entonces, podemos extender x_1 hasta una base ortonormal (ortonormalización de Gram-Schmidt), $x_2, \dots, x_n$ de modo que la matriz X cuyas columnas son $x_1, \dots, x_n$ es unitaria. Es más: X^*AX tiene la forma $[\lambda_1, \text{algo}; 0, A_1]$. por inducción existe U_1 tal que $U_1^*A_1U_1$ es triangular superior y los elementos de la diagonal son los autovalores de A_1 . Tomamos $U = X[1, 0; 0, U_1]$. U es unitaria (sencillo)

$U^*AU = [[1, 0; 0, U_1^*]X^*AX[1, 0; 0, U_1] = [1, 0; 0, U_1^*][\lambda_1, \text{algo}; 0, A_1][1, 0; 0, U_1] = [\lambda_1, aU_1; 0, U_1^*A_1U_1]$ que es triangular superior. Además, se comprueba que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A (el determinante de $U^*AU - \lambda_i I$ se anula).

2) Si A es normal, sea $R = U^*AU$. Entonces

$$R^*R = (U^*AU)^*(U^*AU) = U^*A^*AU = U^*AA^*U = (U^*AU)(U^*A^*U) = RR^*$$

Luego R es normal. Pero el elemento (1,1) de $R^*R = RR^*$ es

$$\bar{\lambda}\lambda = |\lambda_1|^2 = (RR^*)_{11} = |\lambda_1|^2 + \sum_{k=2}^n |r_{1k}|^2.$$

Luego $r_{1k} = 0$. Repitiendo el proceso, se obtiene que es diagonal.

Recíprocamente, si U^*AU es diagonal, D , entonces $A = UDU^*$ y $A^*A = AA^*$.

Ejc: Resultados de traza $\text{tr} A = \text{suma autovalores}$ y $\det A = \text{prod autovalores}$.

Matriz definida positiva Una matriz hermítica $A \in \mathcal{M}_n$ es definida positiva (resp. semidefinida positiva) si

$$v^*Av > 0, v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad (\text{resp. } v^*Av \geq 0, v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}).$$

Proposición 1.3

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica. Se verifica:

1. A es definida positiva si y sólo si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
2. A es semidefinida positiva si y sólo si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.



Demostración 1) Sea A def. positiva. Sea $\lambda \in \text{Sp}(A)$ y v un autovector asociado no nulo.

$$0 < v^*Av = v^*\lambda v = \lambda v^*v$$

Como $v^*v > 0$, tenemos que $\lambda > 0$.

Supongamos que A es hermítica y los autovalores son reales positivos. Por el Teorema de Schur existe U unitaria tal que

$$U^*AU = D = \text{diag}(\lambda_i)$$

Entonces

$$v^*Av = v^*UDU^*v = (U^*v)^*D(U^*v) = w^*Dw = \sum \lambda_i |w_i|^2 > 0.$$

Proposición 1.4

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Entonces A^*A es una matriz hermítica y semidefinida positiva.

Si además A es invertible, entonces A^*A es definida positiva.



Demostración $(A^*A)^* = A^*A$ ->hermítica.

$$v^*(A^*A)v = (Av)^*Av \geq 0 \text{ ->semidefinida positiva.}$$

Si A es invertible, entonces 0 no es autovalor, luego es definida positiva.

1.2 Factorización de matrices

El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ son conocidos.

Llamaremos matriz ampliada del sistema y la denotaremos $(A|b)$ a la matriz cuyas n primeras columnas son las columnas de A y la columna $n + 1$ es b .

Consideremos que tenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ son conocidos.

Para ciertas matrices A el sistema es fácil de resolver:

1. A diagonal.
2. A triangular superior.
3. A triangular inferior.
4. A ortogonal o unitaria.

Supongamos que la matriz A factoriza como producto de varias matrices

$$A = M_1 M_2 \dots M_k,$$

de modo que las matrices M_i se correspondan con matrices de sistemas “fáciles de resolver”.

Entonces, podemos resolver el sistema recursivamente:

$$M_1 y_1 = b, M_2 y_2 = y_1, \dots, M_k y_k = y_{k-1},$$

y tendremos que la solución es $x = y_k$.

Por ejemplo, si $A = M_1 M_2$, basta resolver $M_1 y = b$ y $M_2 x = y$.

1.2.1 Factorización LU

Decimos que una matriz invertible A admite una factorización LU si se puede escribir en la forma:

$$A = LU$$

donde

- L es una matriz triangular inferior ($l_{ij} = 0$ si $i < j$).
- U es una matriz triangular superior ($u_{ij} = 0$ si $i > j$).

Si conocemos una factorización LU de una matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, podemos resolver el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con el siguiente procedimiento:

- Resolvermos mediante sustitución progresiva el sistema

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}.$$

- Obtenemos la solución $\mathbf{x}$ resolviendo por sustitución regresiva el sistema

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}.$$

También es útil para calcular el determinante, inversas, etc.

Obtener una factorización LU de una matriz $\mathbf{A}$ es equivalente a resolver el sistema

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

donde los elementos de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son las incógnitas.

Tenemos n^2 ecuaciones y $n^2 + n$ incógnitas.

Debemos fijar n condiciones. Algunas posibilidades:

- Factorización de Doolittle, si L es triangular inferior unitaria.
- Factorización de Crout, si U es triangular superior unitaria.
- Factorización de Choleski, si $U = L^t$.

Por omisión, se considerará que la factorización LU es la de Doolittle.

Teorema 1.3

Si los n menores principales de la matriz $A \in \mathcal{M}_n$ son no singulares, entonces la matriz A admite una factorización LU.



1.2.2 Factorización LU con pivoteo

Dada $\sigma \in S_n$, denominamos **matriz de permutaciones asociada a σ** a la matriz

$$P = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n$, $\mathbf{PA}$ permuta por σ las filas de $\mathbf{A}$.

Lema 1.1

Sea P una matriz de permutaciones. Entonces en cada fila y en cada columna de P hay un único 1 y el resto de posiciones contienen ceros. Además, $\det(P) = \text{sig}(\sigma)$ y

$$PP^t = P^tP = I.$$



Supongamos que tenemos el sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

y sabemos

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}.$$

Para resolver el sistema, resolvemos

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb},$$

y

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Teorema 1.4

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n$ invertible, existe una matriz de permutación P , una matriz triangular inferior $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, con $l_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$, y una matriz triangular superior U invertible tales que

$$PA = LU.$$

**Demostración****Ejemplo:**

Tomemos la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tomamos para el primer paso las matrices:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Permutamos la fila 1 y 3 de $\mathbf{U}$ y de $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos cero debajo de la diagonal y guardamos los multiplicadores en $\mathbf{L}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{18} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{18} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{10}{9} & \frac{11}{9} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{23}{18} & -\frac{14}{9} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{41}{18} & \frac{4}{9} & \frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

Permutamos las filas 2 y 4 de $\mathbf{U}$ y de $\mathbf{P}$ y las de $\mathbf{L}$ pero omitiendo la diagonal.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{18} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{18} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{41}{18} & \frac{4}{9} & \frac{19}{6} \\ 0 & -\frac{23}{18} & -\frac{14}{9} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{10}{9} & \frac{11}{9} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, hacemos cero debajo de la diagonal ($\mathbf{P}$ permanece inalterado)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{18} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{18} & \frac{23}{41} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{20}{41} & -\frac{59}{74} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{41}{18} & \frac{4}{9} & \frac{19}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{74}{41} & -\frac{66}{41} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{96}{37} \end{pmatrix}$$

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Decimos que A admite una *factorización LU de Cholesky* si existe una matriz **real**

triangular inferior $\mathbf{L}$ tal que los elementos de su diagonal son positivos y

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top.$$

Teorema 1.5

Una matriz $\mathbf{A}$ real es simétrica y definida positiva si y sólo si admite una factorización LU de Choleski. 

Por ejemplo, consideremos la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4,0 & 1,0 & 0,0 \\ 1,0 & 4,0 & 1,0 \\ 0,0 & 1,0 & 8,0 \end{pmatrix},$$

Como es simétrica, calculamos su factorización:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,5 & 1,9364916731 & 0,0 \\ 0,0 & 0,516397779494 & 2,78088714862 \end{pmatrix},$$

(luego es definida positiva.)

1.3 Normas matriciales

1.3.1 Norma matricial

Norma matricial Una norma (vectorial) sobre $\mathcal{M}_n$ es una aplicación,

$$\|\cdot\|: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad A \rightarrow \|A\|,$$

que verifica:

1. $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$.
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathcal{M}_n$.
3. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n$.

Decimos que es una norma matricial si además verifica

4. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathcal{M}_n$.

Ejemplos Sea $A \in \mathcal{M}_n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Podemos definir las siguientes normas:

- Norma no matricial: $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.
- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
- $\|A\|_2 = \rho(A^* A)^{1/2}$.

Normas matriciales compatibles e inducidas Sea $\|\cdot\|_v$ una norma vectorial en $\mathbb{K}^n$ y $\|\cdot\|_M$ una norma matricial en $\mathcal{M}_n$.

Decimos que $\|\cdot\|_M$ es una norma matricial compatible si

$$\|Av\|_v \leq \|A\|_M \|v\|_v, \quad \forall v \in \mathbb{K}^n, A \in \mathcal{M}_n.$$

Decimos que $\|\cdot\|_M$ es una norma matricial inducida si

$$\|A\|_M = \max_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_v}{\|v\|_v} = \max_{\|v\|_v=1} \|Av\|_v, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

Si $\|\cdot\|_M$ es una norma matricial inducida entonces $\|I\|_M = 1$.

Ejemplos

- $\|A\|_1$ inducida por $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$, $v \in \mathbb{K}^n$.
- $\|A\|_\infty$ inducida por $\|v\|_\infty = \max_{i=1}^n |v_i|$, $v \in \mathbb{K}^n$.
- $\|A\|_2$ inducida por $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$, $v \in \mathbb{K}^n$.
- La norma de Frobenius:

$$\|A\| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \text{tr}(A^* A)^{1/2}$$

no es una norma inducida.

- Toda norma vectorial es compatible con la matricial inducida, pero dada una norma matricial, existen infinitas normas compatibles con ella.

La norma de Frobenius:

$$\|A\| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \text{tr}(A^* A)^{1/2}$$

no es una norma inducida: (Ejercicio)

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq (\text{Des. Cauchy} - \text{Schwarz}) \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right| = \left(\sum_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{1 \leq k, j \leq n} |b_{kj}|^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

No es inducida: $\|I\| = \sqrt{n} \neq 1$, y para toda norma inducida, $\|I\|_M = 1$.

Es compatible con la norma euclídea (ejercicio?)

Toda norma vectorial es compatible con la matricial inducida, pero dada una norma matricial, existen infinitas normas compatibles con ella.

Basta considerar $\|v\|_v := \|vu^t\|_M$ para $u \neq 0$ fijo.

Ejc: comprobar que es una norma vectorial

Es compatible pues: $\|Av\|_v = \|(Av)u^t\|_M \leq \|A\|_M \|vu^t\|_M = \|A\|_M \|v\|_v$.

La norma inducida es una norma matricial

Proposición 1.5

Si $\|\cdot\|_v$ es una norma vectorial sobre $\mathbb{K}^n$, entonces la norma inducida

$$\|A\|_M = \max_{\|v\|_v=1} \|Av\|_v$$

es una norma matricial, compatible con $\|\cdot\|_v$.



Demostración En primer lugar, está bien definida pues $x \rightarrow \|Ax\|_v$ es una función continua, luego alcanza su máximo en el compacto $\{\|v\|_v = 1\}$. Además, ambas normas son compatibles

$$\|A\|_M = \max_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_v}{\|v\|_v} \geq \frac{\|Av\|_v}{\|v\|_v}$$

luego $\|Av\|_v \leq \|A\|_M \|v\|_v$ para todo $v \neq 0$. Veamos que es una norma matricial: $\|A\|_M = 0$ sii $\max \|Av\|_v / \|v\|_v = 0$ sii $\|Av\|_v = 0$ sii $Av = 0$ sii $A = 0$.

$$\|\lambda A\|_M = \max \|\lambda Av\|_v = |\lambda| \max \|Av\|_v = |\lambda| \|A\|_M$$

Sea u de norma 1 donde se alcanza el supremo de $\|(A+B)v\|_v$

$$\|A+B\|_M = \|(A+B)u\|_v \leq \|Au\|_v + \|Bu\|_v \leq \|A\|_M \|u\|_v + \|B\|_M \|u\|_v = \|A\|_M + \|B\|_M.$$

Sea u de norma 1 donde se alcanza el supremo de $\|(AB)v\|_v$

$$\|AB\|_M = \|(AB)u\|_v \leq \|A\|_M \|Bu\|_v \leq \|A\|_M \|B\|_M \|u\|_v = \|A\|_M \|B\|_M.$$

1.3.2 Normas matriciales inducidas por las vectoriales

Proposición 1.6

1. La norma inducida por $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$, $v \in \mathbb{K}^n$, es

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

2. La norma inducida por $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$, $v \in \mathbb{K}^n$, es

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

3. La norma inducida por $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$, $v \in \mathbb{K}^n$, es

$$\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{1/2}.$$

Demostración

1) Sea A una matriz. Sea y de norma 1 donde se alcance $\|A\|_1$,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \|Ay\|_1 = \sum_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij} y_j| = \sum_j |y_j| \sum_i |a_{ij}| \\ &\leq \sum_j |y_j| \left(\max_k \sum_i |a_{ik}| \right) = \left(\max_k \sum_i |a_{ik}| \right) \|y\|_1 \leq \max_k \sum_i |a_{ik}|. \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que el $\max_k \sum_i |a_{ik}|$ se alcanza en el índice k_0 y consideremos el vector e_{k_0}

$$\|A\|_1 \geq \|Ae_{k_0}\|_1 = \sum_i |a_{ik_0}| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_i |a_{ik}|$$

2) Sea A una matriz. Sea y de norma 1 donde se alcance $\|A\|_\infty$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \|Ay\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| |y_j| \\ &\leq \max_j |y_j| \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|y\|_\infty \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que el $\max_i \sum_j |a_{ij}|$ se alcanza en el índice I . Consideremos el vector v definido por $v_j = \bar{a}_{Ij}/|a_{Ij}|$ si $a_{Ij} \neq 0$, $v_j = 0$ en caso contrario. Entonces $\|v\|_\infty = 1$, $\|Av\|_\infty \geq \sum_j |a_{Ij}|$

$$\|Av\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} v_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| |v_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Luego $\|Av\|_\infty = \sum_j |a_{Ij}| \leq \|A\|_\infty$.

3) Sabemos que los autovalores de A^*A son todos reales positivos o nulos. Además, por ser hermítica, el Teorema de Schur implica que existe una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ formada por autovectores de A^*A (U). Sea y de norma 1 donde se alcanza $\max_{\|v\|=1} \|Av\|_2^2$. Si $y = \sum \alpha_i u_i$,

$$1 = \|y\|_2^2 = y^* y = \left(\sum \bar{\alpha}_i u_i^* \right) \left(\sum \alpha_j u_j \right) = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \alpha_j u_i^* u_j$$

$$= \sum_i \bar{\alpha}_i \alpha_i = \sum |\alpha_i|^2$$

Además

$$\begin{aligned} \|Ay\|_2^2 &= (Ay)^*(Ay) = y^* A^* A y = \sum_i \bar{\alpha}_i u_i^* (A^* A) \sum_j \alpha_j u_j = \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \alpha_j u_i^* (A^* A) u_j = \\ &= \sum_{ij} \bar{\alpha}_i \alpha_j u_i^* \lambda_j u_j = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 \leq \rho(A^* A) \sum |\alpha_i|^2 = \rho(A^* A). \end{aligned}$$

Por otra parte, Sea λ_I el autovalor que da el radio espectral y u_I un autovector no nulo de norma 1 asociado.

$$\begin{aligned} \max_{\|v\|=1} \|Av\|_2^2 &\geq \|Au_I\|_2^2 = (Au_I)^*(Au_I) = u_I^* (A^* A) u_I = u_I^* \lambda_I u_I \\ &= \lambda_I |u_I|^2 = \lambda_I = \rho(A^* A). \end{aligned}$$

1.3.3 Error y condicionamiento

Sea $\tilde{x}$ una solución aproximada de $Ax = b$. Definimos el *vector de error* como

$$x_\delta = \tilde{x} - x,$$

donde x es la solución exacta del problema.

Definimos el *vector de error residual* como

$$b_\delta = A\tilde{x} - b.$$

Nótese que $Ax_\delta = b_\delta$.

Fijada una norma, definimos los errores relativos asociados a los errores anteriores como

$$E = \frac{\|x_\delta\|}{\|x\|}, \quad R = \frac{\|b_\delta\|}{\|b\|}.$$

Consideremos una norma matricial inducida por una vectorial (denotaremos ambas como $\|\cdot\|$).

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Denominamos *condicionamiento* de A respecto a la norma $\|\cdot\|$ a

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Proposición 1.7

Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida y $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz invertible. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\text{cond}(A) \geq 1$.
2. $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$.
3. $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Teorema 1.6

Sean $b, b_\delta \in \mathbb{R}^n$ no idénticamente nulos. Denotemos x y $x + x_\delta$ a las soluciones respectivas de los sistemas lineales

$$Ax = b \quad A(x + x_\delta) = b + b_\delta.$$

Entonces se verifica

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|b_\delta\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x_\delta\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b_\delta\|}{\|b\|}$$

Además, para toda matriz A invertible, existen $b, b_\delta \in \mathbb{R}^n$ no idénticamente nulos tal que las desigualdades se alcanzan. 

Demostración De $A(x + x_\delta) = b + b_\delta$, tenemos que $x_\delta = A^{-1}b_\delta$.

Entonces $\|x_\delta\| \leq \|A^{-1}\| \|b_\delta\|$

Por otra parte, $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$, entonces $1/\|x\| \leq \|A\|/\|b\|$.

Juntando ambas desigualdades tenemos la que queremos.

Por otra parte, por definición de norma inducida, existe x tal que $\|Ax\| = \|A\| \|x\|$. Definimos $b = Ax$ para este x .

De nuevo por definición de norma inducida, existe b_δ tal que $\|A^{-1}b_\delta\| = \|A^{-1}\| \|b_\delta\|$.

Para los sistemas lineales $Ax = b$ y $A(x + x_\delta) = b + b_\delta$, tenemos que $x_\delta = A^{-1}b_\delta$, luego $\|x_\delta\| = \|A^{-1}\| \|b_\delta\|$ y $\|A\| \|x\| = \|b\|$ y de ahí se sigue la igualdad.

Teorema 1.7

Sean $b, b_\delta \in \mathbb{R}^n$ no idénticamente nulos, $A, A_\delta \in \mathcal{M}_n$ tales que A y $A + A_\delta$ son matrices invertibles y denotemos x y $x + x_\delta$ a las soluciones respectivas de

$$Ax = b, \quad (A + A_\delta)(x + x_\delta) = b + b_\delta.$$

Entonces se verifica

$$\frac{\|x_\delta\|}{\|x + x_\delta\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\|A_\delta\|/\|A\|} \left(\frac{\|b_\delta\|}{\|b\|} + \frac{\|A_\delta\|}{\|A\|} \right)$$



Tema 1 Ejercicios

1. Encontrar ejemplos de matrices A tales que
 - (a). A no sea normal.
 - (b). A sea normal pero no unitaria.
 - (c). A sea unitaria pero no hermítica.
2.  Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. Demostrar que si A es una matriz triangular superior e invertible, entonces su inversa es triangular superior.

3.  Sea A una matriz subdividida en bloques de la forma

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde los bloques son de $n \times n$. Demuestre que si $B - I$ es no singular, entonces para $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & (B^k - I)(B - I)^{-1}C \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

4.  Calcular para valores de α del tipo $10.^n$ el error cometido por la factorización LU

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \alpha x_1 + x_2 = 2 + \alpha. \end{cases}$$

Dibujar en una gráfica los errores.

5.  Calcular para valores de α del tipo $10.^n$ el error cometido por la factorización LU con pivote

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \alpha x_1 + x_2 = 2 + \alpha. \end{cases}$$

Dibujar en una gráfica los errores. Comparar con los del ejercicio anterior

6.  Al aplicar la factorización LU con pivote a una matriz diagonalmente dominante, ¿siempre se elige como pivote el elemento de la diagonal?
7. A partir de la eliminación gaussiana, obtener la factorización LU de las siguientes matrices:

- (a). $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- (b). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

8.  Mediante factorización LU, obtener la inversa de las siguientes matrices

- (a). $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$(b). A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

9. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

- (a). Determinar una matriz triangular inferior M con diagonal unitaria y una matriz triangular superior U tal que $MA = U$.
- (b). Determinar una matriz triangular inferior L con diagonal unitaria y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$. Mostrar que $ML = I$ (es decir, $L = M^{-1}$).

10.  Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a). Obtener la factorización LU de la matriz A .
 - (b). Utilizar dicha factorización para obtener la inversa de A .
 - (c). Obtener la factorización LU de $A^t A$. A partir de dicha factorización, obtener la factorización de la forma LDL^t y a partir de ella la factorización de Choleski.
11. Probar que la siguiente matriz no puede factorizarse como producto LU , donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Factorizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a). Como LU donde L es triangular inferior con diagonal unitaria y U es triangular superior.
- (b). Usando la factorización anterior, factorizarla como LDU donde L es triangular inferior con diagonal unitaria, D es diagonal y U es triangular superior con diagonal unitaria.
- (c). Usando la factorización anterior, factorizarla como LU donde L es triangular inferior y U es triangular superior con diagonal unitaria.
- (d). Usando la factorización anterior, factorizarla como LL^t , donde L es triangular inferior.

13.  Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a). Obtener la factorización de Schur. ¿Qué ocurre? Calcular los autovalores de la matriz A y discutir

porqué no factoriza en los reales como una matriz unitaria por una matriz triangular. Obtener la factorización en los números complejos en doble precisión (CDF)

- (b). Resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (1, 2, 3)$ usando la factorización anterior.
- (c). Consideremos ahora la aplicación lineal dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1,0 & 2,0 \\ 2,0 & 4,0 \end{pmatrix}$$

Calcular su factorización de Schur. Representar las columnas de la matriz U y también las de AU .

- (d). Obtener la factorización de Schur de cualquiera de las matrices anteriores "paso a paso", siguiendo la demostración vista en clase. Para calcular un autovector se puede usar la función *eigenvectors_right* y para extender a una base ortonormal, se puede utilizar la función *gram_schmidt* de Sage.
14.  Un cambio de coordenadas (lineal) en el espacio viene dado por una matriz de 3×3 A , de modo que si (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un punto, entonces $A(x_1, x_2, x_3)^T$ son las coordenadas del punto transformado.
- (a). Plantear las ecuaciones que han de verificar los elementos de la matriz del cambio de coordenadas, para que dicho cambio transforme los puntos $(1, 2, 1)$, $(0, 3, 2)$, $(-1, -1, 0)$ en (el triángulo) $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$.
 - (b). Resolver el sistema anterior mediante factorización LU .
 - (c). Usando la factorización anterior, obtener la matriz de cambio de coordenadas que transforme los puntos $(1, 2, 1)$, $(0, 3, 2)$, $(-1, -1, 0)$ en (el triángulo) $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$.
15. Calcular la norma uno, infinito y euclídea de las siguientes matrices:

(a). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Calcular los valores $\alpha \in [0, 2\pi]$ para los que la norma uno e infinito de las siguiente matrices sea máxima

(a). $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

(b). $A = \begin{pmatrix} 2\cos(\alpha) & 2\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

17.  Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a). Representar en una gráfica la imagen de la bola unidad (con la norma euclídea) por la aplicación lineal dada por la matriz A . En la misma gráfica, representar la imagen de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
- (b). Añadir a la gráfica anterior los autovectores de A y su imagen. Utilizar la orden *arrow*.
- (c). En la gráfica anterior, representar también la imagen de los autovectores de A^*A .
- (d). Añadir a la gráfica la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{\rho(A^*A)}$.

(e). Considerar las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular sus autovalores y tratar de deducir cómo será la imagen de la bola unidad. Repetir el proceso anterior con estas matrices.

18. ♣ Demostrar que la norma matricial (norma de Fröbenius)

$$\|A\| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad (A = \{a_{ij}\} \in \mathcal{M}_n),$$

no está inducida por ninguna norma vectorial, pero es compatible con la norma vectorial euclídea (utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

19. ♣ Demostrar que la norma matricial

$$\|A\| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|, \quad (A = \{a_{ij}\} \in \mathcal{M}_n),$$

no está inducida por ninguna norma vectorial, pero es compatible con la norma vectorial $\|\cdot\|_1$.

20. Demostrar que $\|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ no es una norma matricial.

21. ♣ Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se verifica

(a). Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial inducida tal que $\|A\| < 1$, entonces la matriz $I + A$ es invertible y se tiene que

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

(b). Si una matriz de la forma $I + A$ es singular, entonces necesariamente $\|A\| \geq 1$ para cualquier norma matricial (inducida o no).

22. Sea A una matriz hermítica tal que $\Delta_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Entonces A es definida positiva.

23. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz real, simétrica y definida positiva. Entonces

(a). $a_{ii} > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

(b). $\max_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$.

24. 📖 Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

(a). Calcular la imagen de la bola unidad con norma euclídea por las aplicaciones lineales definidas por dichas matrices.

(b). Calcular la norma 2 de ambas matrices.

(c). Obtener las direcciones en las que la imagen de la bola unidad alcanza el máximo y el mínimo.

25. Demostrar que para cualquier matriz no singular A y cualquier norma matricial $\|\cdot\|$,

$$\|I\| \geq 1, \quad \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}.$$

26. Demostrar que el producto de matrices ortogonales es ortogonal y que el determinante de una matriz ortogonal vale ± 1 .

27. Demostrar (usando la norma euclídea matricial)

(a). $\rho^{1/2}((A^* + B^*)(A + B)) \leq \rho^{1/2}(A^*A) + \rho^{1/2}(B^*B)$.

(b). $\rho((AB)^*(AB)) \leq \rho(A^*A)\rho(B^*B)$.

28. ♣ Sea $A \in \mathcal{M}_n$ invertible y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida. Probar

- (a). $\text{cond}(A) \geq 1$
- (b). $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$
- (c). $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

29.  Consideramos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/30 \\ 1 & 1/31 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 31/30 \\ 32/31 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el término independiente se ha obtenido midiendo con un error en cada coordenada de $\pm 0,01$. Acotar el error en las soluciones.

30.  Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a). Calcula las normas 1, 2 e infinito de la matriz A .
- (b). Calcula un vector unitario con la norma 1, u , tal que $\|A\|_1 = \|A\|_1 \|u\|_1$.
- (c). Idem para las normas 2 e ∞ .
- (d). Calcular los autovectores unitarios (usar la orden de sage *eigenvectors_right*) con la norma euclídea de $A^t A$. Calcular su imagen por A . Comprobar que tanto los autovectores como sus imágenes son ortogonales, es decir, forman una base. Calcular $\min_{\|u\|_2=1} \|Au\|_2$. Repetir el proceso cambiando A por A^{-1} . ¿Qué relación hay entre la $1/\|A^{-1}\|_2$ y $\min_{\|u\|_2=1} \|Au\|_2$?
- (e). Calcular $\min_{\|u\|_1=1} \|Au\|_2$.
- (f). Idem para la norma infinito.

31.  La matriz de Hilbert de $n \times n$ está definida como

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Son matrices típicamente mal condicionadas.

- (a). Calcula los números de condición de la matriz de Hilbert de dimensión 5 con la norma 1 y con la norma infinito.
- (b). Crea varias matrices aleatorias de dimensión 4. Calcula su determinante y su número de condición (con tu norma preferida). ¿Qué relación hay?
- (c). Crea muchas matrices aleatorias de dimensión 4 y representa en una gráfica el determinante y el número de condición.

32.  Consideramos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/30 \\ 1 & 1/31 \end{pmatrix} x = b,$$

con b un vector unitario con la norma 2. Suponemos que tenemos un pequeño error en el término independiente, es decir, en lugar de b , tenemos $b + \tilde{b}$ y sabemos que $\|\tilde{b}\|_2 / \|b\|_2 \leq 1$.

- (a). Calcular el número de condición de la matriz del sistema con la norma euclídea.
- (b). Acotar el error relativo de las soluciones.
- (c). Encontrar b de norma 1 y $\tilde{b}$ en las condiciones anteriores para que el error sea máximo.
- (d). Idem para mínimo.

Tema 2 Elegant $\text{\LaTeX}$ Templates

Elegant $\text{\LaTeX}$ Program developers are intended to provide you beautiful, elegant, user-friendly templates. Currently, the Elegant $\text{\LaTeX}$ is composed of [ElegantNote](#), [ElegantBook](#), [ElegantPaper](#), designed for typesetting notes, books, and working papers respectively. Latest releases are strongly recommended! This guide is aimed at briefly introducing the 101 of this template. For any other question, suggestion or comment, feel free to contact us on GitHub [issues](#) or email us at elegantlatex2e@gmail.com.

Contact Infos:

- GitHub: <https://github.com/ElegantLaTeX/>
- CTAN: <https://ctan.org/pkg/elegantbook>
- Download: [release](#), [latest version](#)

2.1 Online Usage

You can visit [Overleaf](#) to use our template online anywhere and anytime without local installation. To find our template, search `elegantlatex` in the templates or simply visit [search result](#), choose the template you prefer and Open as Template to own a copy yourself to edit freely. To learn more about Overleaf, please refer to [Documentation](#).

2.2 Portable Version

For portable version, simply download latest ElegantBook-master from GitHub or CTAN (to be more accurate, download `elegantbook.cls`) and save the file(s) under your working directory. This way of installation is simple and convenient, but you have to manually update `cls` now and then.

2.3 Update Templates

You can use cmd/terminal to update the `tlmgr` itself and all the packages, the commands are:

```
tlmgr update --self
tlmgr update --all
```

To learn more, please refer to [How do I update my \$\text{\TeX}\$ distribution?](#)

2.4 Other Release Versions

If you are a $\text{\TeX}$ Live 2018/2019/2020/2021 user and would like to update, the official solution is to uninstall the previous version. If you want to save the bother of uninstallation and re-installation, please copy `elegantbook.cls` to the installation directory of $\text{\TeX}$ Live 2022 (default: `C:\texlive\2022\texmf-dist\tex\latex\``elegantbook`), run `texhash` in cmd.

Tema 3 ElegantBook Settings

This template is based on the Standard L^AT_EX book class, so the options of book class work as well (Note that the option of papersize has no effect due to `device` option). The default encoding is UTF-8 while T_EX Live is recommended. The test environments are Win10/Ubuntu 20.04/macOS + T_EX Live 2022/ MacT_EX 2022, either pdfL^AT_EX or XeL^AT_EX works fine for `lang=en`.

3.1 Languages

We defined one option named `lang` which has two basic values, `lang=en` (default) , `lang=cn`. Different values will alter the captions of figure/table, abstract name, refname, etc. You can use this option as

```
\documentclass[en]{elegantbook}
\documentclass[lang=en]{elegantbook}
```

Besides the two basic language translation, our user provide more options, here is a short brief introduction to these translation. Since I am not familiar with these languages, I can't guarantee that the translations are correct, please comment on GitHub if you have some questions.

- Italian translation `lang=it`, provided by [VincentMVV](#) , please refer to [Italian translation](#);
- French translation `lang=fr`, provided by [abfek66](#) , please refer to [Italian translation](#);
- Dutch Translation `lang=nl`, provided by [inktviz75](#) , please refer to [Dutch Translation](#);
- Hungarian translation `lang=hu`, provided by [palkotamas](#), please refer to [Hungarian translation](#);
- Deutsch translation `lang=de`, provided by Lisa, please refer to [Deutsch translation](#);
- Spanish translation `lang=es`, provided by Gustavo A. Corradi, please refer to [Spanish translation](#);
- Mongolian translation `lang=mn`, provided by [Altantsooj](#), please refer to [Mongolian translation](#);
- Japanese translation `lang=jp`, provided by [inusturbo](#), please refer to [Japanese translation](#).

Comentario Chinese Characters are acceptable **ONLY** in `lang=cn`.

3.2 Device Mode Option

The option for device (`device`) was originally used in ElegantNote, now we include this option in ElegantBook¹ as well. Activate iPad mode in the following way²:

```
\documentclass[pad]{elegantbook} %or
\documentclass[device=pad]{elegantbook}
```

3.3 Color Themes

This template contains 5 color themes, i.e., `green`³, `cyan`, `blue`(default), `gray`, `black`. You can choose `green` with

¹Pictures have to be modified accordingly.

²Default size: normal, A4 paper.

³Original default theme.

```
\documentclass[green]{elegantbook} %or
\documentclass[color=green]{elegantbook}
```

Cuadro 3.1: ElegantBook Themes

	green	cyan	blue	gray	black	Main Environments
structure						chapter section subsection
main						definition exercise problem
second						theorem lemma corollary
third						proposition

If you want to customize the colors, please select `nocolor` or use `color=none` and declare the main, second, and third colors in the preamble section as follows:

```
\definecolor{structurecolor}{RGB}{60,113,183}
\definecolor{main}{RGB}{0,166,82}%
\definecolor{second}{RGB}{255,134,24}%
\definecolor{third}{RGB}{0,174,247}%
```

3.4 Cover

3.4.1 Customized Cover

From v3.10, customized cover is allowed, you can choose or hide any element as you prefer. Current optional elements are:

- : \
- sub : \sub
- author: \author
- institute: \institute
- date: \date
- version: \version
- extra information: \extrainfo
- cover image: \cover
- logo: \logo

Besides, an extra command `\bioinfo` is provided with two options—caption and content. For instance, if you want to display Username: 111520, just type in

```
\bioinfo{Username}{111520}
```

You can change the color of the horizontal bar of the cover by

```
\definecolor{customcolor}{RGB}{32,178,170}
\colorlet{coverlinecolor}{customcolor}
```

3.4.2 Cover Image

The cover image used in this template is from pixabay.com. The image is completely free and can be used under any circumstance. The cover image size is 1280×1024 . If you would like to change the cover, please crop it according to the size of the cover picture strictly. One free online image clipping site: fotor.com. Feel free to join our QQ Group to get more elegant covers.

3.4.3 Logo

Aspect ratio of the logo is 1:1 in this guide, i.e. a square picture. To replace the logo, do remember to choose the appropriate picture.

3.4.4 Stylized Cover

Want to use stylized cover?(For instance, A4-sized PDF designed by Adobe Illustrator) Please comment out `\make` and use `pdfpages` to insert the cover. Similar for using `page`. If you would like to use the cover in version 2.x, please refer to [e page](#).

3.5 Chapter Title Display Styles

This template contains 2 sets of *display styles*, `hang`(default) and `display` style. For the former, chapter is displayed on a single line (`hang`). For the latter, chapter is displayed on a double line (`display`). In this guide, we use `hang`. To change display style, use:

```
\documentclass[hang]{elegantbook} %or
\documentclass[ style=hang]{elegantbook}
```

3.6 Introduction of Math Environments

We defined two sets of theorem modes, `simple` style and `fancy` style (default). You may change to `simple` mode by

```
\documentclass[simple]{elegantbook} %or
\documentclass[mode=simple]{elegantbook}
```

In this template, we defined four different theorem class environments

- *Theorem Environments*, including and content, numbering corresponding to chapter. Three types depending on the format:
 - **definition** environment, the color is **main**;
 - **theorem, lemma, corollary, axiom, postulate** environment, the color is **second**;
 - **proposition** environment, the color is **third**.

- *Example Environment*, including **example**, **exercise**, **problem** environment, auto numbering according to chapter.
- *Proof Environment*, including **proof**, **note** environment containing introductory symbol (**note** environment) or ending symbol (**proof** environment).
- *Conclusion Environment*, including **conclusion**, **assumption**, **property**, **remark** and **solution**⁴ environments, all of which begin with boldfaced words, with format consistent with normal paragraphs.

All of theorem environments have star versions: **definition***, **theorem***, **lemma***, **corollary***, **axiom***, **postulate***, **proposition***. Environments with an asterisk are not numbered.

3.6.1 Theorem Class Environments

3.6.1.1 fancy mode

In fancy mode, the template uses the `tcolorbox` package to customize the theorem class environments, it is slightly different from the normal theorem environments. The usage is as follows:

```
% name + label
\begin{theorem}{theorem name}{label}
  The content of a theorem with name and label.
  Use \ref{thm:label} to refer this theorem.
\end{theorem}

% no name + label
\begin{theorem}{}{label no name}
  The content of a theorem without name.
  Use \ref{thm:label no name} to refer this theorem.
\end{theorem}

% name + no label
\begin{theorem}{theorem name}{}
  The content of a theorem without label.
  Can't refer this theorem.
  The last {} can be removed.
\end{theorem}

% no name + no label
\begin{theorem}{}{}
  The content of a theorem without name and label.
  Can't refer this theorem.
  Both of {} can be removed.
\end{theorem}
```

The first parameter `theorem name` represents the name of the theorem. If the current theorem has no name, please use `{}`⁵, and the second parameter `label` represents the label used in cross-reference with `\ref{thm:label}`. Note that cross-references must be prefixed with `thm:`.

Other theorem class environments with the same usage includes:

From version 4.1, you can write your theorem environments as follows:

⁴We also define an option `result`, which can hide the `solution` and `proof` environments. You can switch between `result=answer` and `result=noanswer`.

⁵Unless this theorem has neither no label, you should not omit this `{}`.

Cuadro 3.2: Theorem Class Environments

Environment	Label text	Prefix	Cross-reference
definition	label	def	<code>\ref{def:label}</code>
theorem	label	thm	<code>\ref{thm:label}</code>
postulate	label	pos	<code>\ref{pos:label}</code>
axiom	label	axi	<code>\ref{axi:label}</code>
lemma	label	lem	<code>\ref{lem:label}</code>
corrlary	label	cor	<code>\ref{cor:label}</code>
proposition	label	pro	<code>\ref{pro:label}</code>

```

\begin{theorem}[theorem name]\label{thm:theorem-label}
  The content of theorem.
\end{theorem}
% or
\begin{theorem}\label{thm:theorem-without-name}
  The content of theorem.
\end{theorem}

```

In this case, cross-reference don't have to be prefixed, i.e. the parameter of `\ref` is the same as that of `\label`.

3.6.1.2 simple mode

In simple mode, the template uses the `amsthm` package to customize the theorem class environments. The usage is as follows:

```

\begin{theorem}[theorem name]\label{thm:theorem-label}
  The content of theorem.
\end{theorem}
% or
\begin{theorem}\label{thm:theorem-without-name}
  The content of theorem without name.
\end{theorem}

```

3.6.2 Counter for Theorem Environments

You can use `thmcnt` option to control the theorem counter/number display style for the theorem environments, the acceptable options are `chapter` (default) and `section`:

```

\documentclass[section]{elegantbook} % turn the Theorem 4.1 to Theorem 4.1.1
\documentclass[thmcnt=section]{elegantbook}

```

3.6.3 Other Customized Environments

The other three math environments can be called directly since there are no additional option for them, e.g. example:

```
\begin{example}
This is the content of example environment.
\end{example}
```

The effect is as follows:

Ejemplo 3.1 This is the content of example environment.

These are all similar environments with slight differences lies in:

- Example, exercise, problem environments number within chapter;
- Note begins with introductory symbol and proof ends with ending symbol;
- Conclusion and other environments are normal paragraph environments with boldfaced introductory words.

3.7 List Environments

This template uses `tikz` to customize the list environments, with `itemize` environment customized to the third depth and `enumerate` environment customized to fourth depth. The effect is as follows

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| • first item of nesti; | 1. first item of nesti; |
| • second item of nesti; | 2. second item of nesti; |
| • first item of nestii; | (a). first item of nestii; |
| • second item of nestii; | (b). second item of nestii; |
| • first item of nestiii; | I. first item of nestiii; |
| • second item of nestiii. | II. second item of nestiii. |

3.8 Fonts

Alert After v3.10, `newtx` is reset to `cm`, together with other two options, the `math` font option offers:

1. `math=cm`(default), use $\text{\LaTeX}$ default math font (recommended).
2. `math=newtx`, use `newtxmath` math font (may bring about bugs).
3. `math=mtpro2`, use `mtpro2` package to set math font.

If you use `newtx` fonts, type in:

```
\documentclass[math=newtx]{elegantbook}
```

When you are using `newtx`, please pay attention to the hyphens. For instance,

$$\int_{R^q} f(x,y) dy.\textit{offsin} x \quad (3.1)$$

The corresponding code is:

```
\begin{equation}
\int_{R^q} f(x,y) dy.\emph{of \kern0pt f} \sin x
\end{equation}
```

3.8.1 Symbol Fonts

Feedback from some 3.08 users claims that error occurs when using our templates with `yhmath`, `esvect` and other packages.

LaTeX Error:
Too many symbol fonts declared.

The reason is that the template redefines font for math so that no new math font is allowed to be added. To use `yhmath` and/or `esvect`, please locate `yhmath` or `esvect` in `elegantbook.cls`, uncomment corresponding related code.

```
%%% use yhmath pkg, uncomment following code
% \let\oldwidering\widering
% \let\widering\undefined
% \RequirePackage{yhmath}
% \let\widering\oldwidering

%%% use esvect pkg, uncomment following code
% \RequirePackage{esvect}
```

3.9 Bibliography

This template uses `biblatex` to generate the bibliography, the default `citestyle` and bibliography style are both `numeric`. Let's take a glance at the citation effect. [3] use data from a major peer-to-peer lending [2] marketplace in China to study whether female and male investors evaluate loan performance differently [1].

If you want to use `biblatex`, you must create a file named `reference.bib`, add bib items (from Google Scholar, Mendeley, EndNote, and etc.) to `reference.bib` file, then cite the bibkey in the `tex` file. The biber will automatically generate the bibliography for the reference you cited.

In order to get the editors' auto-completion working, you need to add following code in your preamble:

```
\addbibresource[location=local]{reference.bib}
```

Then include the print commands where you want to print the bibliography:

```
\printbibliography[heading=bibintoc, =\ebibName]
```

To change the bibliography style, this version introduces two options: `citestyle` and `bibstyle`, please refer to [CTAN:biblatex](#) for more detail about these options. You can change your bibliography style as

```
\documentclass[citestyle=numeric-comp, bibstyle=authoryear]{elegantbook}
```

We also add the `bibend` option to this template, you can choose `biber` (default) or `bibtex` as you like, `biber` is recommended.

```
\documentclass[bibtex]{elegantbook} % or
\documentclass[bibend=bibtex]{elegantbook}
```

3.10 Preface

If you want to add a preface before the first chapter with the number of chapter unchanged, please add the preface in the following way:

```
\chapter*{Introduction}
\markboth{Introduction}{Introduction}
The content of introduction.
```

3.11 Content Option and Depth

Option for content `toc`, you can choose either one column(`onecol`) or two columns(`twocol`). For two columns:

```
\documentclass[twocol]{elegantbook}
\documentclass[toc=twocol]{elegantbook}
```

Default content depth is 1, use to use `\setcounter{tocdepth}{2}`.

3.12 Introduction Environment

We create a introduction environment to display the structure of chapter. The basic useage is as follows:

```
\begin{introduction}
  \item Definition of Theorem
  \item Ask for help
  \item Optimization Problem
  \item Property of Cauchy Series
  \item Angle of Corner
\end{introduction}
```

And you will get:

Introducción

- | | |
|---|---|
| ☐ <i>Definition of Theorem</i> | ☐ <i>Property of Cauchy Series</i> |
| ☐ <i>Ask for help</i> | ☐ <i>Angle of Corner</i> |
| ☐ <i>Optimization Problem</i> | |

You can change the of this environment by modifying the optional argument of this environment:

```
\begin{introduction}[Brief Introduction]
...
\end{introduction}
```

The environment `problemset` is used at the end of each chapter to display corresponding exercises. Just type in the following sentences:

```
\begin{problemset}
  \item exercise 1
```

```
\item exercise 2
\item exercise 3
\end{problemset}
```

And you will get:

🎐 Tema 3 Ejercicios 🎐

1. exercise 1
2. exercise 2
3. exercise 3
4. math equation test:

$$a^2 + b^2 = c_{2_i}(1, 2)[1, 23] \quad (3.2)$$

Comentario If you want to customize the of `problemset`, please change the optional argument like in introduction environment. In this version the `problemset` environment automatically appears in the table of contents but not in the header or footer(to be fixed).

Solución *If you want to customize the of `problemset`, please change the optional argument like in introduction environment. In this version the `problemset` environment automatically appears in the table of contents but not in the header or footer(to be fixed).*

3.13 Margin Notes

In 3.08, we introduced `marginpar=margintrue` and `\elegantpar` (Beta) with piles of bugs. Hence we decide to remove them in 3.09 and will suspend the options till revolutionary optimization. Sorry for all the bugs! However, we retain the option `marginpar` for users to get margin notes by activating `marginpar=margintrue` and using `\marginpar` or `marginnote` packages.

Comentario Note that text and equation are both available in the margin notes.

```
% text
\marginpar{margin paragraph text}

% equation
\marginpar{
\begin{equation}
a^2 + b^2 = c^2
\end{equation}
}
```

For tables and figures, note that floating environment is not allowed. You have to use `includegraphics` or `table` and use `\captionof` to name it. To get centralized figures or tables, use `\centerline` or `center`. To learn more, please refer to **Caption of Figure in Marginpar**.

```
% graph with centerline command
\marginpar{
\centerline{
\includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
}
```

```
\captionof{figure}{your figure caption}
}

% graph with center environment
\marginpar{
  \begin{center}
    \includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
    \captionof{figure}{your figure caption}
  \end{center}
}
```

Tema 4 ElegantBook Writing Sample

Introducción

☐ Theorem Class Envrionments

☐ Cross Reference

☐ Math Environments

☐ List Environments

☐ Logo and Base

☐ $a^2 + b^2 = c^2$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

4.1 Writing Sample

We will define the integral of a measurable function in three steps. First, we define the integral of a nonnegative simple function. Let E be the measurable set in $\mathcal{R}^N$.

Definición 4.1 (Left Coset)

Let H be a subgroup of a group G . A left coset of H in G is a subset of G that is of the form xH , where $x \in G$ and $xH = \{xh : h \in H\}$. Similarly a right coset of H in G is a subset of G that is of the form Hx , where $Hx = \{hx : h \in H\}$



Nota Note that a subgroup H of a group G is itself a left coset of H in G .

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Teorema 4.1 (Lagrange's Theorem)

Let G be a finite group, and let H be a subgroup of G . Then the order of H divides the order of G .



As theorem 4.1 refered.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec

et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Teorema 4.2 (theorem name)

The content of theorem.



we can refer this theorem as 4.2.

Proposición 4.1 (Size of Left Coset)

Let H be a finite subgroup of a group G . Then each left coset of H in G has the same number of elements as H .



Demostración Let z be some element of $xH \cap yH$. Then $z = xa$ for some $a \in H$, and $z = yb$ for some $b \in H$. If h is any element of H then $ah \in H$ and $a^{-1}h \in H$, since H is a subgroup of G . But $zh = x(ah)$ and $xh = z(a^{-1}h)$ for all $h \in H$. Therefore $zH \subset xH$ and $xH \subset zH$, and thus $xH = zH$. Similarly $yH = zH$, and thus $xH = yH$, as required.

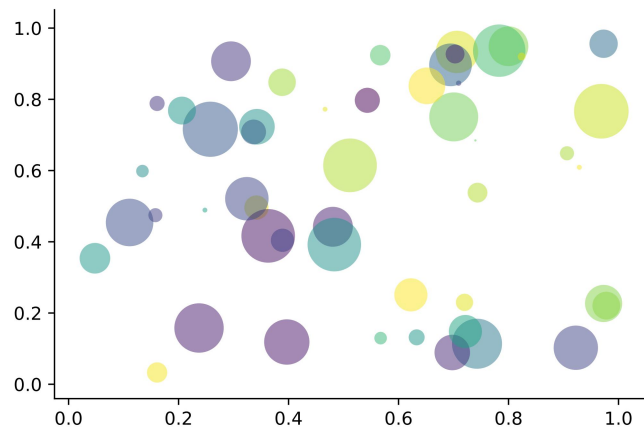


Figura 4.1: Matplotlib: Scatter Plot Example

Regression analysis is a powerful statistical method that allows you to examine the relationship between two or more variables of interest. While there are many types of regression analysis, at their core they all examine the influence of one or more independent variables on a dependent variable. The process of performing a regression allows you to confidently determine which factors matter most, which factors can be ignored, and how these factors influence each other.

Let's continue using our application training example. In this case, we'd want to measure the historical levels of satisfaction with the events from the past three years or so, as well as any information possible in regards to the independent variables.

4.2 Second section

This second section may include some special word, and expand the ones already used.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada

Cuadro 4.1: Auto MPG and Price

	(1)	(2)
mpg	-238.90*** (53.08)	-49.51 (86.16)
weight		1.75*** (0.641)
constant	11,253*** (1,171)	1,946 (3,597)
obs	74	74
R^2	0.220	0.293

Standard errors in parentheses

*** $p < 0,01$, ** $p < 0,05$, * $p < 0,1$

fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

- Routing and resource discovery;
 - Language Models
 - Vector Space Models
- Resilient and scalable computer networks;
- Distributed storage and search.

Tema 4 Ejercicios

1. Solve the equation $5(-3x - 2) - (x - 3) = -4(4x + 5) + 13$.
2. Find the distance between the points $(-4, -5)$ and $(-1, -1)$.
3. Find the slope of the line $5x - 5y = 7$.

Tema 5 FAQ

We list some FAQs for users to refer to:

1. *Why option numbers for natbib fail to take effect in v3.07?*

In v3.07, when gbt7714 is introduced, option authoryear is incompatible with `natbib`. In v3.08 and 3.09, numbers, numbers, super and authoryear are introduced.

2. *I want to customize font and background color.*

Please use `pagecolor` to change background color, refer to `this` to customize font.

3. *Which version should I choose?*

Please use **Latest Release** via GitHub or T_EX Live 2022.

4. *Which editor should I choose?*

You can use T_EX Live 2022 built-in T_EXworks or T_EXstudio. You may refer to **T_EXworks autocomplete**. T_EX Live 2022 + T_EXstudio is strongly recommended. Related configurations can be found at **vscode-latex** and **sublime-text-latex**.

5. *Hello, we want to use ElegantBook to write a book about machine learning and would like your authorization.*

Feel free to use our templates by pointing out our copyright. For other issues, please refer to LPPL-1.3c. If you want to show us your work, you can share the URL with us afterwards.

6. *What is cross reference?*

This template is aimed at who are not a complete beginner for L^AT_EX. Please learn more about L^AT_EX before using this template.

7. *Is the language for code highlighting optional?*

Yes, `listings` package is used in ElegantBook, hence language is optional(e.g. `language=Python`). For global setting, use `lstset`. For more information, please refer to package documentations.

8. *When will Beamer template (ElegantSlide or ElegantBeamer) forthcoming?*

Since there is an excellent theme **Metropolis**, no plan for Beamer theme.

Tema 6 Version History

We revised our templates now and then. This section shows the version story of ElegantBook.

2022/12/31 *Actualización: release of v4.5.* **Stop Maintenance**

- ① Add new document option `usesamecnt` for same thm counter for all theme environments;
- ② Add 5-th optional parameter for `elegantnewtheorem`.

2022/08/15 *Actualización: release of v4.4.*

- ① Add custome theorem definition command `\elegantnewtheorem`;
- ② Fix star environment(*) for inner environments ([issue #167](#));
- ③ Change English fonts from TeX Gyre Termes to TeX Gyre TermesX;
- ④ Re-construct some theorem environments to enhance compatibility;
- ⑤ Remove Gitee repo due the privacy policy;
- ⑥ Re-open Github pull requests.

2022/04/09 *Actualización: release of v4.3.*

- ① Remove part newtx settings, set TeX Gyre Termes/Heros fonts under $\text{Xe}^{\text{L}}\text{TeX}$.
- ② Fix Chinese fonts in the theorem environments.
- ③ Add theorem counter option, `thmcnt=section`.
- ④ Add bib option `bibend`, which can take value of biber and bibtex.
- ⑤ **! Warnings:** The multilingual option may cause some unexpected errors, you can report in this [issue](#).

2022/03/08 *Actualización: release of v4.2.*

- ① Bug fix due to the update of newtx fonts;
- ② Add ‘Chapter’ in TOC, and redefine `\chaptername` to unify the logic under different languages;
- ③ Add language option for Japanese, `lang=jp`.

2021/05/02 *Actualización: release of v4.1.*

- ① **! Big Change:** Change the bibliography method from $\text{Bib}^{\text{L}}\text{TeX}$ to biblatex(with backend biber);
- ② **! Big Change:** Add support for the default theorem writing method (with optional name and label);
- ③ Add left and right space;
- ④ Support hyperlink from the text of TOC;
- ⑤ Remove the $\text{pdf}^{\text{L}}\text{TeX}$ compatiblity check for Chinese.
- ⑥ Add multilingual support, for french `lang=fr`, dutch `lang=nl`, Hungarian `lang=hu`, Spanish `lang=es`, Mongolian `lang=mn` etc.

2020/04/12 *Actualización: release of v3.11, **LAST version of 3.x.***

- ① **! Fix:** Fix `natbib` option clash problems caused by gbt7714 updates.
- ② Remove `base` decorations and its options since `pgfornament` package is not included in $\text{T}^{\text{E}}\text{X}$ Live 2020.
- ③ Fix spacing problem in some environments.
- ④ Introduce language option for Italian, `lang=it`.

2020/02/10 Actualización:release of v3.10

- ① Introduce `math` for math font, optional styles are `newtx` and `cm`.
Notice: The math font `newtxmath` in previous versions is reset to default L^AT_EX math font, to keep previous math font, please declare `math=newtx`.
- ② Introduce `chinesefont` option, with `founder`, `ctexfont` and `nofont` available.
- ③ Turn author information on the cover optional and add customized command `\bioinfo`.
- ④ Add version history with command `\datechange` and environment `change`.
- ⑤ Add Chinese chapter style `scheme` with option `chinese`.
- ⑥ Since the bug raised by `\lvert` is fixed, exchange package positions of `ctex` and `amsmath`.
- ⑦ Drop `\lastpage` from header to avoid page anchor bug and adding `\frontmatter`.
- ⑧ Revise bibliography option `cite` with optional styles `numbers`, `authoryear` and `super`.
- ⑨ Introduce bibliography style option `bibstyle`, with default bib style `apalike` for English mode and `gbt7714` package for Chinese mode.

2019/08/18 Actualización:release of v3.09

- ① Remove `\elegantpar` temporary and remind users to use `\marginnote` and `\marginpar` instead.
- ② Use `esint` to display integral operator.
- ③ Add new command `toc`, with options `onecol` and `twocol`.
- ④ Add new option `cite super` for superscript-displayed citation.
- ⑤ Revise `problemset`.

Bibliografía

- [1] Charles T Carlstrom y Timothy S Fuerst. «Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis». En: *The American Economic Review* (1997), págs. 893-910. ISSN: 0002-8282.
- [2] Qiang Li, Liwen Chen y Yong Zeng. «The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com». En: *China Finance Review International* 8.3 (2018), págs. 256-274.
- [3] Vincenzo Quadrini. «Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations». En: *FRB Richmond Economic Quarterly* 97.3 (2011), págs. 209-254.

Apéndice A Mathematical Tools

This appendix covers some of the basic mathematics used in econometrics. We briefly discuss the properties of summation operators, study the properties of linear and some nonlinear equations, and review the ratios and percentages. We also introduce some special functions that are common in econometrics applications, including quadratic functions and natural logarithms. The first four sections require only basic algebraic techniques. The fifth section briefly reviews differential Calculus. Although Calculus is not necessary to understand much of this book, it is used in some of the end-of-chapter appendices and in some of the more advanced topics in part 3.

A.1 Summation Operator and Description Statistics

Summation Operator is an abbreviation used to express the summation of numbers, it plays an important role in statistics and econometrics analysis. If $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ is a sequence of n numbers, the summation of the n numbers is:

$$\sum_{i=1}^n x_i \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (\text{A.1})$$