Trabajos en grupo

14 de octubre de 2020

Instrucciones

El objetivo de estos “proyectos” es trabajar la capacidad de entender y utilizar un método numérico a partir de la bibliografía disponible. Para ello, se formarán grupos de cuatro o cinco alumnos, que

1. Buscarán información del método(s) en la bibliografía/internet.
2. Elaborarán una pequeña memoria donde se describa el método, sus aplicaciones y propiedades.
3. Crearán una hoja de Sage donde se aplique el método a unos cuantos ejemplos teóricos/aplicados.
4. Realizarán una breve presentación del trabajo realizado.

No todas las tareas han de ser realizadas por todos los integrantes del método, sino que cada uno se puede ocupar de una parte (y pueden hacerlo constar en la memoria). Se recomienda que al menos dos personas se encarguen de la parte de documentación del método y realización de la memoria y de la parte de su aplicación con Sage (para evitar erratas/errores).

La memoria debe mencionar la bibliografía, que será el conjunto de referencias utilizadas. En la memoria, se debe explicar el método y los resultados principales. Si la demostración de algún resultado es muy extensa, complicada o utiliza conceptos matemáticos no estudiados, no se incluirá y sólo se citará la bibliografía donde puede encontrarse. La memoria no debe ser extensa (10 páginas como máximo), pero es importante que no sea la transcripción literal de la bibliografía.

Enunciados

1. El **método del gradiente conjugado** permite resolver un sistema lineal con matriz simétrica y definida positiva en sólo n iteraciones, donde n es el tamaño de la matriz. Esto lo convierte en un método muy útil para resolver sistemas de este tipo, en particular, para calcular mínimos de sistemas cuadráticos. Se pide describir el método, implementarlo y aplicarlo al cálculo de mínimos de una función (o cuádrica definida positiva).

   Bibliografía: [2, p. 204]

2. Otra factorización de matrices con aplicaciones interesantes es la inducida por la **descomposición en valores singulares**. Un aplicación importante de dicha descomposición es obtener la **pseudoinversa** de una matriz, lo que permite resolver sistemas singulares o sin unicidad de soluciones.

   Bibliografía: [2, p. 258]

3. Una **matriz de Hessenberg superior** es una matriz que es "casi" triangular superior. De modo preciso, si $A = (a_{ij})$, A es de Hessenberg superior si $a_{ij} = 0$ si $j < i - 1$. Dada una matriz A cuadrada, existe una matriz de Hessenberg B y una matriz ortogonal P, tal que A y B son conjugadas por P, es decir, $B = P^t AP$. Dicha matriz B se puede calcular mediante el método de Householder. Además, si la matriz es simétrica, se transforma en una matriz tridiagonal. Como aplicación, se puede mirar algún algoritmo numérico en su versión para matrices tridiagonales (por ejemplo, el método QR de Francis-Kublanovskaya).

   Bibliografía: [3, p. 203]

4. Dado un polinomio con raíces simples, podemos determinar cuántas raíces tiene en cada intervalo mediante los **polinomios de Sturm**.

   Por otra parte, podemos aproximarlas las raíces de un polinomio con el método de Newton e irlas eliminando del polinomio. Este algoritmo se denomina de **Newton-Horner**.

   Bibliografía: [1, p. 297] y [3, p. 266]

5. Las curvas de Bezier se utilizan en diseño para el modelado. En particular, las curvas de Bezier con uno y dos puntos de control se utilizan para diseñar tipografías. En el proceso de diseño, es habitual que un dibujo a mano alzada se transforme en una curva de Bezier. Para ello, se realiza calcula el spline que interpola la curva dibujada (la "curva" es en realidad una serie de puntos parametrizados por el tiempo en el que se han pintado) y dicho spline se transforma en una serie de curvas de Bezier. Una aplicación sería en, a partir de los puntos (en la forma (t, x, y), donde t es el "tiempo"), obtener los puntos de control de la curvas de Bezier que coincidan con el spline que interpola. Esto es lo que hacen los programas de dibujo (vectoriales).

   Bibliografía: [3, p. 367]

6. La interpolación por splines se extiende de diversas maneras cuando pasamos de una a dos dimensiones. Si triangulamos el espacio, tendremos la interpolación lineal, pero si lo que creamos es una malla regular, podemos considerar la interpolación bilineal y la interpolación bicúbica.

La interpolación lineal se correspondería con los splines lineales, mientras que la interpolación bicúbica podría considerarse análoga a la interpolación cúbica de Hermite.

Una de las aplicaciones estas interpolaciones es el aumento de resolución de una imagen. Concretamente, una imagen en blanco y negro no es más que una matriz tal que cada posición contiene el valor de intensidad de luz de ese pixel, es decir, para cada (i, j) tenemos un valor a_{ij} (entre 0 y 1) que es el color del píxel. También podemos considerar que la matriz son los valores de una cierta función en una malla de $\mathbb{R}^2$, del siguiente modo: Si $\{a_{ij}\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$, podemos definir:

$$f\left(\frac{i-1}{n-1}, \frac{j-1}{m-1}\right) := a_{ij}.$$

Supongamos que hemos extendido f a todo $[0,1]\times[0,1]$ por interpolación bicúbica y sean n', m' números enteros. Podemos obtener la imagen con $n' \times m'$ píxeles definiendo su matrix asociada $\{b_{ij}\}_{1\leq i\leq n', 1\leq j\leq m'}$ como

$$b_{ij} = f\left(\frac{i-1}{n'-1}, \frac{j-1}{m'-1}\right).$$

Formalizar y automatizar este proceso.

7. De modo similar a la interpolación polinomial, podemos considerar la interpolación mediante otra familia de funciones. Por ejemplo, cuando los datos son periódicos con un periodo conocido (T), es habitual interpolarlos mediante la familia de polinomios trigonométricos

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos\left(k2\pi t/T\right) + B_k \sin\left(k2\pi t/T\right),$$

donde, si n es el número de datos, entonces $m = (n-1)/2$ si n es impar y $m = n/2$ y $B_m = 0$ si n es par. Se puede aplicar esta interpolación por ejemplo, sobre sonidos para estimar qué nota está sonando.

Bibliografía: [1, p. 72]

8. Una estrategia para minimizar el error de interpolación, pero manteniendo el número de nodos bajo es la **interpolación adaptativa**.

Bibliografía: [2, p. 424]

Referencias

[1] J. Stoer, and R. Bulirsch. 2002. Introduction to numerical analysis. Springer.

[2] D. Kincaid, y W. Cheney. 2002. Numerical analysis: mathematics of scientific computing. 3rd ed. Pacific Grove, California: Brooks-Cole.

[3] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. 2006. Numerical Mathematics (Texts in Applied Mathematics). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.