Tema 4 Ejercicios

1. *Probar que los polinomios $p(x) = -x^2 + 3x$ y $q(x) = -x^3 + 3x^2$ interpolan los puntos $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,0)$. ¿Por qué no tenemos un único polinomio interpolador en este caso?*
2. *Encontrar a_0, a_1, a_2 tales que la función*
$$f(x) = a_0\frac{1}{1+x^2} + a_1\frac{1}{1+(x-1)^2} + a_2\frac{1}{1+(x-2)^2},$$
interpole a la función e^x en los puntos $x = 0, 1, 2$. Dibuja la gráfica de ambas funciones.
3. *Consideremos la función $f(x) = e^x$. Acotar el error cometido a tomar $f(0{,}5)$ como el valor del polinomio interpolador de f en los puntos $x = 0, 1, 2$.*
4. *Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$. Acotar el error cometido a tomar $f(\pi/5)$ como el valor del polinomio interpolador de f en los puntos $x = 0, \pi/4, \pi/2$.*
5. *Consideremos la función $f(x) = e^x$. Tomamos $x_0 = 0$. ¿Cuál es el mayor valor de x_1 que podemos considerar para que la interpolación lineal de f en x_0, x_1 tenga un error menor de 10^{-2}? (es decir, $|f(x) - p(x)| < 10^{-2}$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, donde p es el polinomio lineal que interpola f en x_0, x_1).*
6. *Hemos aproximado la función $\ln x$ por un polinomio de interpolación de grado 9 en el intervalo $[1,2]$ usando puntos uniformemente distribuidos. Acotar el error cometido.*
7. *Utilizando los polinomios de Lagrange, obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:*

(a).

x	-1	0	1
y	0	3	0

(b).

x	0	1	2
y	-2	0	2

(c).

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

8. *Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas mediante diferencias divididas:*

(a).

x	-1	0	1
y	0	3	0

(b).

x	0	1	2
y	-2	0	2

(c).

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

9. *Sea la función $f(x) = e^x$ y los valores siguientes: $f(0) = 1$, $f(0{,}5) = 1{,}64872$, $f(1) = 2{,}71828$ y $f(2) = 7{,}38906$, efectuar los siguientes cálculos:*
   (a). *Aproximar $f(0{,}25)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.*
   (b). *Aproximar $f(0{,}75)$ usando interpolación lineal a partir de los puntos anteriores más próximos.*
   (c). *Aproximar $f(0{,}25)$ y $f(0{,}75)$ utilizando el polinomio de interpolación de los puntos $(0, f(0))$, $(0{,}5, f(0{,}5))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.*
10. *El polinomio*
$$p(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x + (x+1)x(x-1),$$
es el polinomio interpolador de los puntos $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,5)$, $(2,16)$. Calcular el polinomio interpolador de los puntos $(-2,8)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(1,5)$, $(2,16)$, sin recalcular todo el polinomio de interpolación
11. *Obtener el polinomio interpolador de la siguiente tabla:*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	1

12. *Dados $x_0 < x_1 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0', y_1, y_1' \in \mathbb{R}$, obtener el polinomio interpolador (polinomio interpolador de Hermite) determinado por $p(x_0) = y_0$, $p'(x_0) = y_0'$, $p(x_1) = y_1$, $p'(x_1) = y_1'$.*
13. *Obtener los polinomios interpoladores de las siguientes tablas:*

(a).

x	-1	0	1
y	0	3	0
y'	1	0	2

(b).

x	0	1	2
y	-2	0	2
y'	0	3	0

(c).

x	-1	0	1	2
y	2	0	0	2
y'	0	1	1	0

14. *Obtener la interpolación cúbica a trozos de Hermite de las siguientes tablas:*

(a).

x	-1	0	1
y	0	3	0
y'	1	0	2

(b).

x	0	1	2
y	-2	0	2
y'	0	3	0

(c).

x	-1	0	1	2
y	2	0	0	2
y'	0	1	1	0

15. *Obtener los splines cúbicos naturales que interpolan las siguientes tablas*

(a).

x	-1	0	1
y	0	3	0

(b).

x	0	1	2
y	-2	0	2

(c).

x	-1	0	1	2
y	-1	-2	0	2

16. *Obtener la curva polinomial que interpola los siguientes puntos, considerados en los momentos* $t = 0$, $t = 1$ *y* $t = 2$*:*

(a).

x	-1	0	-1
y	0	3	0

(b).

x	0	-1	2
y	-2	0	2

(c).

x	-1	0	1
y	-1	-2	0

(d).

x	-1	0	-1
y	1	1	1

(e).

x	0	1	-1
y	2	0	2

(f).

x	-1	0	-1
y	1	2	-3