

Tema 2 Ejercicios

1. 🧠 Demostrar que para matrices de orden 2, el método de Jacobi converge si y sólo si el de Gauss-Seidel converge.
2. Aplicar tres pasos del método de Jacobi para aproximar la solución de los siguientes sistemas (partiendo de $(0, 0, 0, 0)$). Calcular el error residual.

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} & b) \begin{cases} 10x_1 + x_2 = 1 \\ 10x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 10x_4 = 0 \end{cases} & c) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_4 = 4 \end{cases}
 \end{array}$$

3. Aplicar tres pasos del método de Gauss-Seidel para aproximar la solución de los siguientes sistemas (partiendo de $(0,0,0,0)$). Calcular el error residual.

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} & b) \begin{cases} 10x_1 + x_2 = 1 \\ 10x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 10x_4 = 0 \end{cases} & c) \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 4x_4 = 4 \end{cases}
 \end{array}$$

4. En general no se puede comparar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Probar que

(a). Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces el método de Jacobi converge, pero el de Gauss-Seidel no.

(b). Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces el método de Gauss-Seidel converge, pero el de Jacobi no.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, probar para qué valores de α el método de Jacobi es convergente.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, probar para qué valores de α y β los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.

7. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

y el vector $b = (1, 2, 3)$.

- (a). 🧠 ¿Existe x_0 tal que el método de Jacobi es convergente?
- (b). 📖 Encontrar un vector inicial de modo que el método de Jacobi para el sistema $Ax = b$ sea convergente. Aplicar 1000 iteraciones del método y representar los errores residuales.
8. 📖 Se considera un disipador en forma de barra. Dividimos barra en 10 secciones de la misma longitud. Denotamos la temperatura de la sección i como x_i . Se sabe que en estado estacionario (es decir, cuando

alcanza el equilibrio), se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 10, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ \dots, \\ -x_8 + 4x_9 - x_{10} = 0, \\ -x_9 + 4x_{10} = 0. \end{cases}$$

- (a). Calcular la solución mediante factorización LU con pivote.
- (b). Calcular la solución mediante dos pasos de Gauss-Seidel. ¿Cuál es el error cometido?

9. Determinar los círculos de Geršgorin de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Utilizando dichos círculos, acotar el radio espectral de A .

10.  Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a). Calcular sus autovectores con Sage.
 - (b). Para cada autovalor, obtener un autovector con norma infinito 1 y que tenga una coordenada igual a 1.
 - (c). Usando el resultado obtenido en el apartado anterior, ¿estarán los autovalores contenidos en los discos de Gershgorin correspondientes a las filas 1 y 3? Comprobar.
11.  Usando el Teorema de Geršgorin, probar que toda matriz A estrictamente diagonal dominante es no singular. Idem si A^t es estrictamente diagonal dominante.
12.  Encontrar una matriz $M_3(\mathbb{R})$ tal que los discos de Gershgorin tengan todos radio estrictamente positivo y que tenga un autovalor que esté en el borde de uno de los discos.
13.  Encontrar una matriz $M_3(\mathbb{R})$ tal que los discos de Gershgorin tengan todos radio estrictamente positivo y que tenga un disco que no contenga autovalores.
14. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia para aproximar el autovalor dominante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

15. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia para aproximar el autovalor dominante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

tomando como vector inicial $x_0 = (1, -1, 2)$.

16. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia inversa para aproximar el autovalor de menor valor absoluto de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tomando como vector inicial $x_0 = (-1, 0, 1)$.

17. Aplicar tres iteraciones del método de la potencia inversa desplazada para aproximar cada uno de los autovalores de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

tomando como vectores iniciales $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 4)$.

18. Encontrar una factorización QR de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

19.  Aplicar 10 pasos del método QR para estimar los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 5,0 & -4,0 & 1,0 \\ -4,0 & 6,0 & -4,0 \\ 1,0 & -4,0 & 5,0 \end{pmatrix}.$$